Η ιστορία των πολυωνύμων

Ερωτήματα

Από πότε γνώριζαν οι άνθρωποι να λύνουν πολυωνυμικές εξισώσεις;

Ποιοι συντέλεσαν στην σταδιακή λύση του προβλήματος που απασχολούσε για χρόνια τους μαθηματικούς;

Ποιος έδωσε οριστική λύση στο πρόβλημα;

Βαβυλώνιοι (3000-2000 π.Χ)

Οι Βαβυλώνιοι είχαν ασχοληθεί με την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων 2ου και 3ου βαθμού.

Είχαν δημιουργήσει πήλινες πίνακες με τετράγωνα και κύβους διαφόρων αριθμών, τους οποίους χρησιμοποιούσαν στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων.
Έλυναν δευτεροβάθμιες εξισώσεις της μορφής

$$x^2 = bx + c$$

Ο τύπος λύσης ήταν

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

Βαβυλώνιοι (3000-2000 π.Χ)

Έλυναν και συγκεκριμένους τύπους τριτοβάθμιων πολυωνυμικών εξισώσεων.

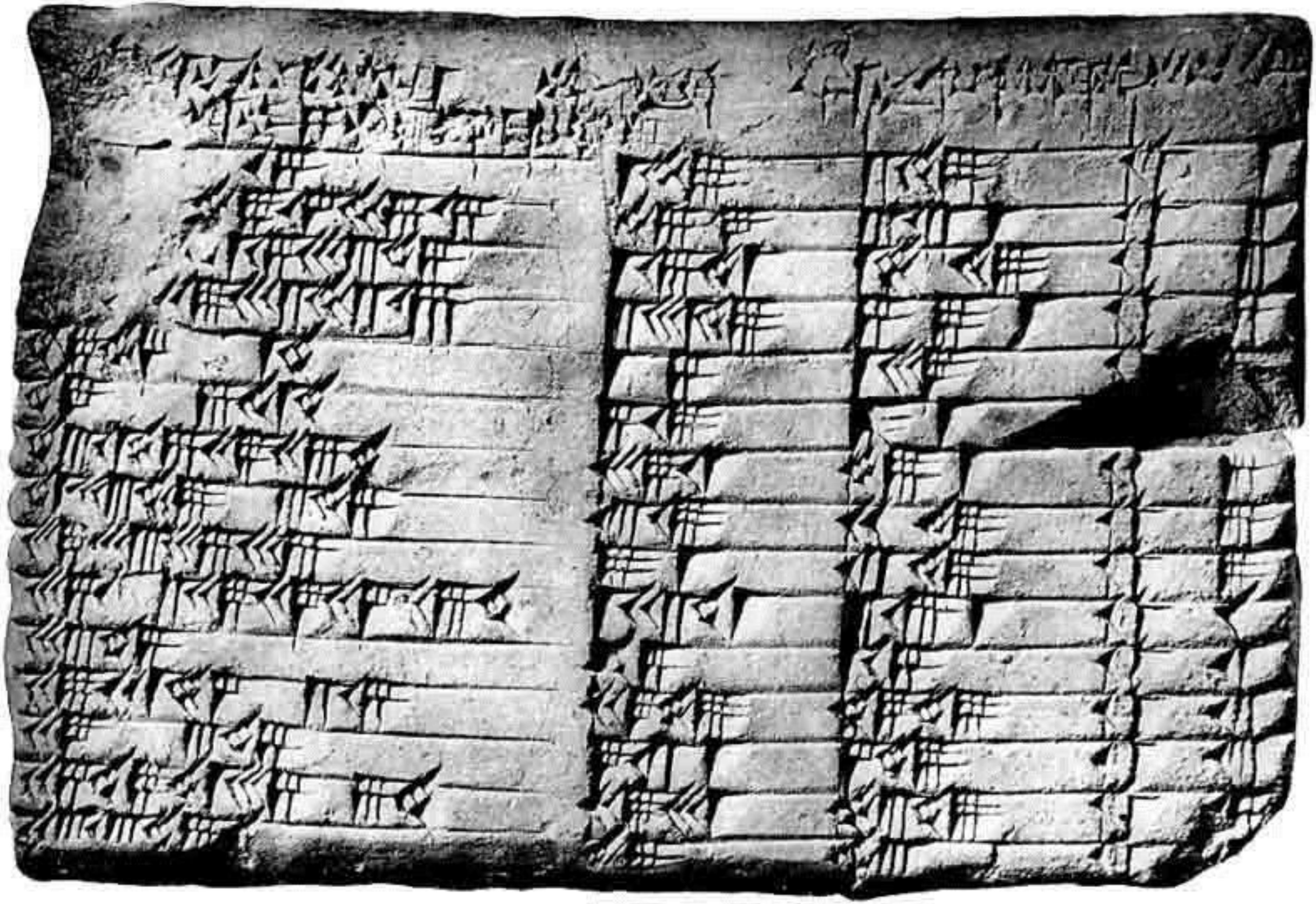
Για παράδειγμα την

$$ax^3 + bx^2 = c$$

Πολλαπλασιάζοντας με a^2 και διαιρώντας με b^2 προκύπτει η εξίσωση

$$\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{ca^2}{b^3}$$

Η τελευταία λύνεται με χρήση των πινάκων που είχαν δημιουργήσει!



Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς

Αρχαίος Έλληνας Μαθηματικός και Αστρονόμος.

Έζησε για 84 χρόνια. Η περίοδος που είναι πιθανόν να έζησε έχει ένα εύρος 500 ετών, ξεκινώντας από τον 2^{o} π.Χ αιώνα. Λόγω της σπουδαιότητας του έργου του είναι πιθανόν να έζησε στα ελληνιστικά χρόνια(323-30 π.Χ), όταν και άκμαζε ο πολιτισμός της Αλεξάνδρειας.

Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς

Θεωρείται πατέρας της Άλγεβρας χάρη στο έργο του, «Αριθμητικά», στο οποίο για πρώτη φορά διαχωρίζει την Άλγεβρα από την Γεωμετρία.

Τα αριθμητικά αποτελούνται από 13 βιβλία, από τα οποία σώζονται μόνο τα 6 σε πρωτότυπη μορφή. Σε αυτά επιλύονται πολυωνυμικές εξισώσεις 1^{ου}, 2^{ου} και 3^{ου} βαθμού.

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBRI SEX,

ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS.

Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque abſolutiſſimis Commentariis illuſtrati.

AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO MEZIRIACO SEBVSIANO, V. C.

LVTETIAE PARISIORVM,

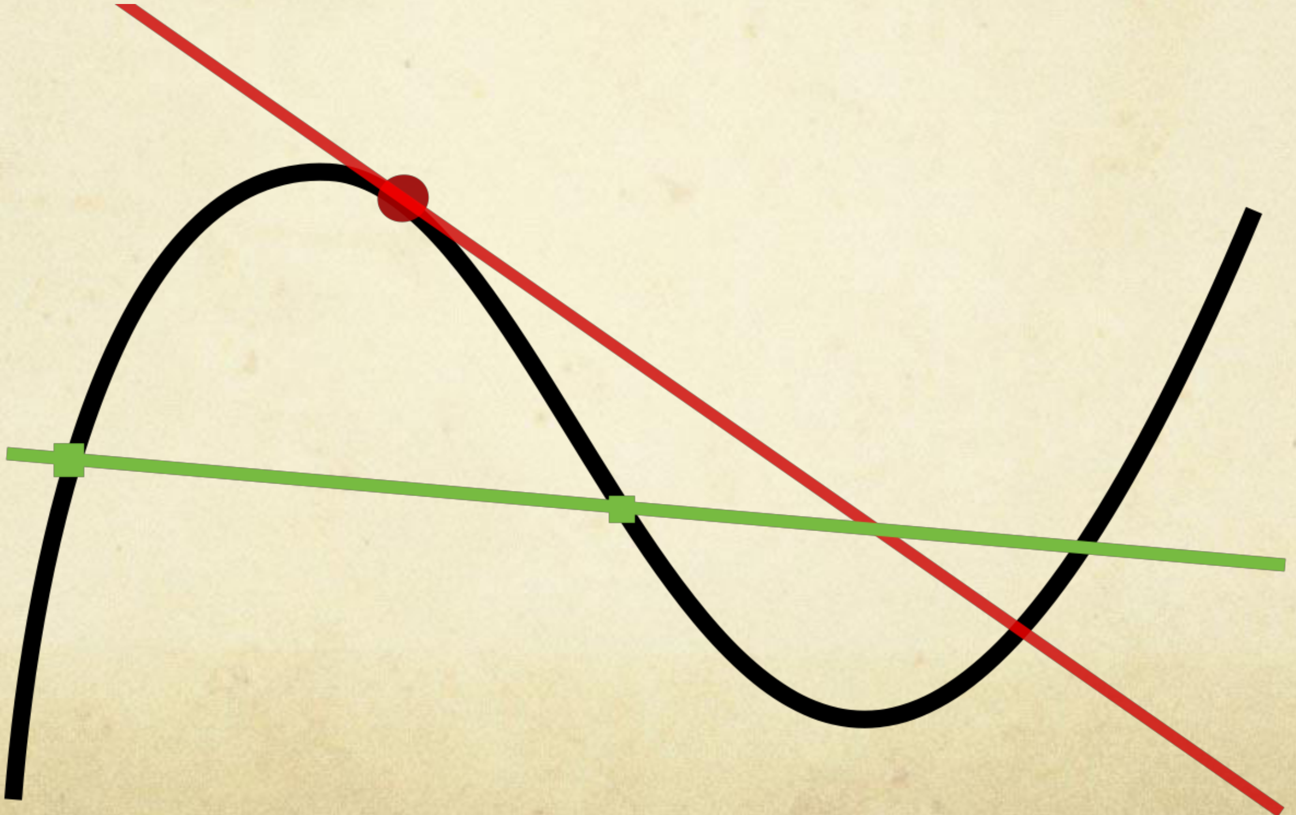
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, ſub Ciconiis.

M. DC. XXI.

CVM PRIVILEGIO REGIS.

Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς

Ο Διόφαντος ήταν ο πρώτος που έλυσε πολυωνυμικές εξισώσεις 3ου βαθμού χρησιμοποιώντας τον κανόνα «Χορδής-Εφαπτομένης».



Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς

Τα βιβλία που σώθηκαν ήταν τα πρώτα, στη σειρά, από τα 13. Σε αυτά εμφανίζεται συμβολισμός για πολυωνυμικές εξισώσεις μέχρι και $6^{ου}$ βαθμού. Εικάζεται ότι ο Διόφαντος, στα επτά βιβλία που χάθηκαν, είχε λύσει και τέτοιες εξισώσεις.

Brahmagupta (598-670 μ.Χ)

Ινδός μαθηματικός και αστρονόμος.

Έδωσε γενική λύση για την πολυωνυμική εξίσωση 1ου βαθμού, η οποία γι αυτόν ήταν της μορφής:

$$ax+b=cx+d$$

Ο τύπος της λύσης ήταν:

$$x=\frac{d-b}{a-c}$$

Η μέθοδος που χρησιμοποίησε ο Brahmagupta ήταν η μεταφορά και η παραγοντοποίηση!

Brahmagupta (598-670 μ.Χ)

Έδωσε, επίσης, γενική λύση για την πολυωνυμική εξίσωση 2ου βαθμού

$$ax^2 + bx = c$$

την

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$$

Al-Khwarizmi (781-850 μ.Χ)

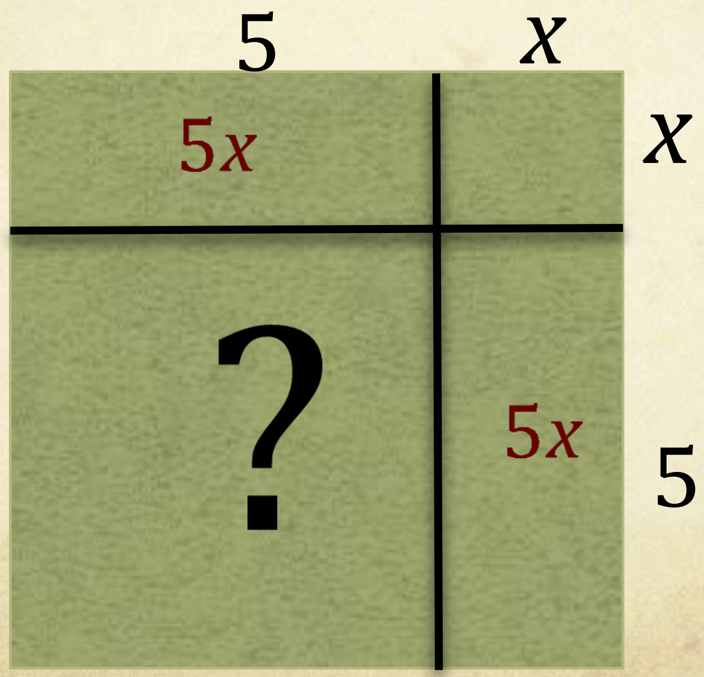
Πέρσης μαθηματικός, αστρονόμος και γεωγράφος.

Το βιβλίο του Al-jabr (π. 830 μ.Χ) είναι αυτό από το οποίο παίρνει το όνομα του ο κλάδος της Άλγεβρας. Λύνονται συστηματικά πολυωνυμικές εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού.

Η μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου του Al-Khwarizmi

Θεωρούμε την εξίσωση 2ου βαθμού:

$$x^2+10x=39$$



Ποιον αριθμό πρέπει να συμπλητώσουμε στο «?», έτσι ώστε να σχηματίζεται τετράγωνο;

Προφανώς η απάντηση είναι 25

Η μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου του Al-Khwarizmi

Προσθέτουμε και στα δύο μέλη της εξίσωσης τον αριθμό 25 και προκύπτει:

$$x^2+10x+25=39+25$$

Άμεσα

$$\left(x+5\right)^2=64$$

και έτσι

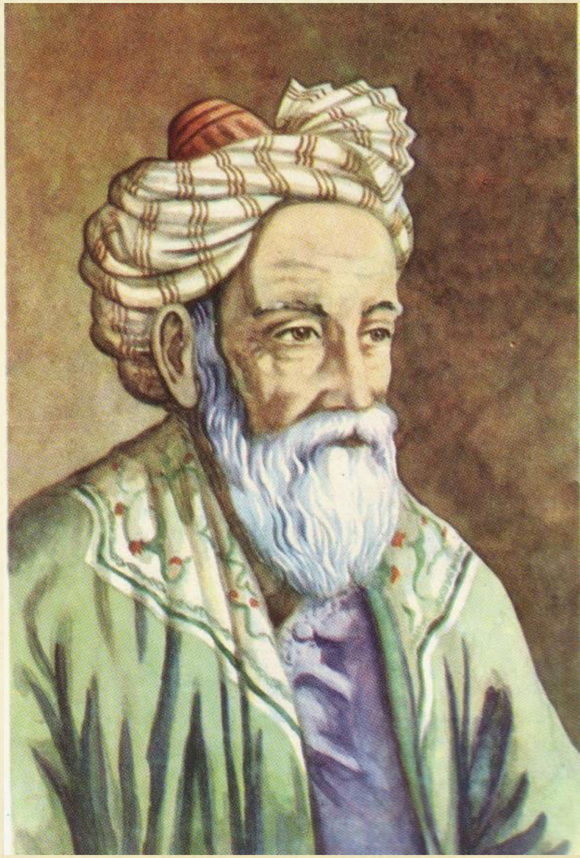
$$x=3$$

Η έτερη λύση, $x=-8$, δεν ήταν αποδεκτή την εποχή εκείνη διότι δεν αντιστοιχούσε σε μήκος.

Ο Al-Khwarizmi έλυνε συγκεκριμένα παραδείγματα. Ωστόσο από πίσω κρύβονταν γενική μέθοδος επίλυσης των εξισώσεων. Από το όνομά του έμεινε στην ιστορία η λέξη ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ!

Omar Khayyam (1048-1131 μ.Χ)

Πέρσης Μαθηματικός, Αστρονόμος και Ποιητής.
Η δουλειά του Khayyam θεωρείται η πρώτη συστηματική προσπάθεια να λυθούν κυβικές εξισώσεις.



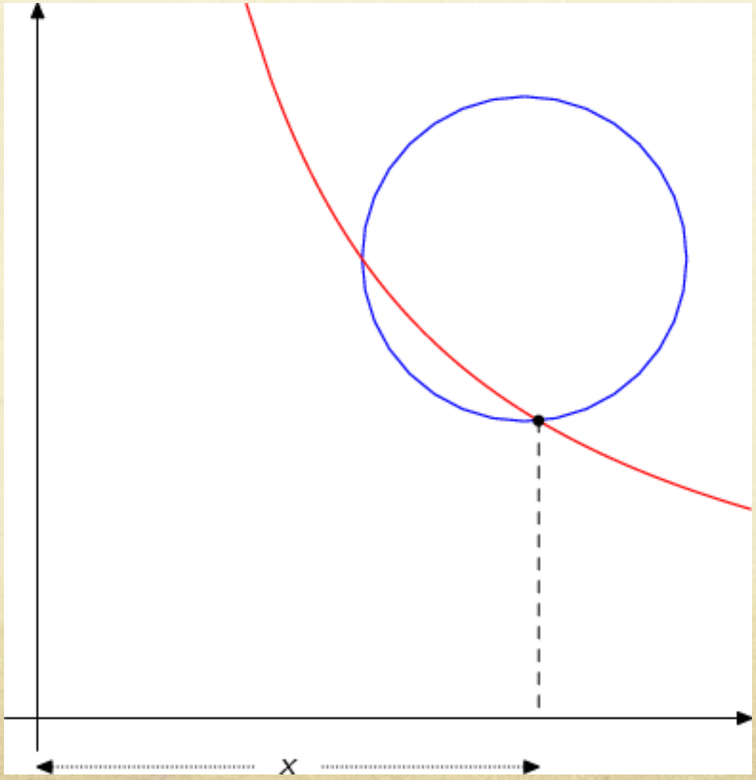
Τον 20ο αιώνα βρέθηκε έργο του Khayyam στο οποίο λύνεται, με γεωμετρικό τρόπο, η κυβική εξίσωση:

$$x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$$

Omar Khayyam
(1048-1131 μ.Χ)

Η λύση της ανάγεται στην τομή ενός κύκλου και μίας υπερβολής.

Σχηματικά



Η ιστορία των Ιταλών

Nicollò Fontana-Tartaglia (1500-1557)
Gerolamo Cardano (1501-1576)
Scipione del-Ferro (1465-1526)

Την εποχή εκείνη ασχολούνταν με την επίλυση εξισώσεων, στα πλαίσια μαθηματικών «μονομαχιών». Ο ένας έδινε προβλήματα στον άλλον και αυτός που έλυνε τα περισσότερα ήταν ο νικητής.

Η ιστορία των Ιταλών

Η γενική λύση της κυβικής εξίσωσης (χωρίς τον τετραγωνικό όρο) δημοσιεύτηκε το 1545 από το Gerolamo Cardano, στο βιβλίο του με τίτλο «Ars Magna».

Ο Cardano ήταν από τους πρώτους που εργάστηκε με αρνητικούς αριθμούς. Ωστόσο οι συντελεστές των πολυωνύμων με τα οποία δούλευε ήταν θετικοί αριθμοί.

Η ιστορία των Ιταλών

Gerolamo Cardano VS Nicollò Tartaglia

VS

Στην πραγματικότητα η κυβική εξίσωση $x^3 = ax + b$ λύθηκε από τον Nicolló Tartaglia, ο οποίος την έδωσε στον Cardano, με την προϋπόθεση να μην την δημοσιοποιήσει.

Η ιστορία των Ιταλών

Ο Cardano βρήκε το αδημοσίευτο έργο του Scipione del Ferro, ο οποίος εργάστηκε ανεξάρτητα από το Tartaglia και είχε καταλήξει στο ίδιο αποτέλεσμα με αυτόν. Έτσι θεώρησε πως πλέον μπορεί να δημοσιεύσει το αποτέλεσμα παρά την υπόσχεση που είχε δώσει στον Tartaglia.

Αυτή η ενέργεια του Cardano προκάλεσε την οργή του Tartaglia, ο οποίος λέγεται ότι αφιέρωσε το υπόλοιπο της ζωής του για να καταστρέψει τον Cardano. Μάλιστα η κόντρα ανάμεσα στους δύο μετατράπηκε σε διαμάχη ανάμεσα στον Tartaglia και τον μαθητή του Cardano, Ludovico Ferrari.

Η επίλυση της τριτοβάθμιας (κυβικής) εξίσωσης

Θεωρούμε την πολυωνυμική εξίσωση 3ου βαθμού:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Εκτελούμε το μετασχηματισμό $x = y - \frac{a}{3}$ για να «σκοτώσουμε» τον όρο ax^2.

Προκύπτει εξίσωση της μορφής

$$y^3 = py + q$$

Η επίλυση της τριτοβάθμιας (κυβικής) εξίσωσης

Εκτελούμε τον μετασχηματισμό

$$y = u + \frac{p}{3u}$$

Καταλήγουμε στην εξίσωση

$$u^3 + \left(\frac{p}{3u}\right)^3 = q$$

Η επίλυση της τριτοβάθμιας (κυβικής) εξίσωσης

Θέτοντας $z = u^3$ προκύπτει η εξίσωση

$$z + \frac{p^3}{27z} = q$$

Δηλαδή η εξίσωση

$$z^2 - qz + \frac{p^3}{27} = 0$$

Η επίλυση της τριτοβάθμιας (κυβικής) εξίσωσης

Η επίλυση της τελευταίας εξίσωσης είναι (...και ήταν) γνωστή!
Προκύπτει

$$u^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Η επίλυση της τριτοβάθμιας (κυβικής) εξίσωσης

Τελικά....

$$y=u+\frac{p}{3u}=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Η γενική λύση της τεταρτοβάθμιας πολυωνυμικής εξίσωσης

Μετά από την δημοσιοποίηση της λύσης της τριτοβάθμιας εξίσωσης από τον Cardano το 1545, η λύση της τεταρτοβάθμιας πολυωνυμικής εξίσωσης ήρθε σύντομα.

Η επιτυχία οφείλεται στον, μαθητή του Cardano, Ludovico Ferrari (1525-1565). Η λύση δημοσιεύθηκε στο βιβλίο του Cardano «Ars Magna».

Μετά την επίλυση της τεταρτοβάθμιας υπήρξε ένα μεγάλο κενό, περίπου, 250 ετών που δεν μπορούσαν να βρουν γενικό τύπο επίλυσης για την 5ο-βάθμια....

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Νορβηγός Μαθηματικός που καθ' όλη την διάρκεια της ζωής του αντιμετώπιζε οικονομικά προβλήματα.

Αποφοίτησε από το Πανεπιστήμιο του Όσλο, ενώ έζησε σε Βερολίνο, Παρίσι και Κοπεγχάγη στην προσπάθειά του να συναντήσει μεγάλους μαθηματικούς της εποχής.

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Έμεινε στην ιστορία για το έργο του «Υπόμνημα επί των αλγεβρικών εξισώσεων, όπου αποδεικνύεται το αδύνατο της επιλύσεως της γενικής εξισώσεως του πέμπτου βαθμού», το οποία βασίζεται στο Θεώρημα Abel-Rufini (1824).

Στο Θεώρημα αυτό αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει τύπος που να εξασφαλίζει τη λύση της πολυωνυμικής εξίσωσης 5ου βαθμού με ριζικά.

Έχει σημασία να δώσουμε έμφαση στην έννοια «λύση με ριζικά». Δηλαδή λύση που να περιέχει τους συντελεστές του πολυωνύμου, τις γνωστές πράξεις και ριζικά οποιασδήποτε τάξης.

Το γεγονός ότι μία πολυωνυμική εξίσωση δεν λύνεται με ριζικά, ΔΕΝ σημαίνει ότι δεν έχει λύση. Άλλωστε υπάρχει το διάσημο Θεώρημα με το όνομα «Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας», από το οποίο γνωρίζουμε ότι κάθε πολυωνυμική εξίσωση με μιγαδικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μία μιγαδική ρίζα. Με διάφορες μεθόδους, π.χ Αριθμητικής Ανάλυσης, μπορούμε να βρούμε και τις υπόλοιπες.

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Κατά τη διάρκεια της παραμονής του στο Παρίσι, ο Abel προσβλήθηκε από φυματίωση. Το 1828 ταξίδεψε με έλκηθρο για να συναντήσει την μνηστή του και η κατάσταση της υγείας του επιδεινώθηκε ραγδαία.

Καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής του ο Abel έψαχνε για δουλειά που θα του εξασφάλιζε τα προς το ζην. Σε ένα ταξίδι του στο Βερολίνο είχε γνωρίσει τον August Leopold Crelle, ο οποίος εξέδιδε μαθηματικό περιοδικό και ανέπτυξαν αμοιβαία εκτίμηση.

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Ο Crelle κατάφερε να του βρει δουλειά και του έγραψε γράμμα, για να τον ενημερώσει, στις 8 Απριλίου 1829. Δύο μέρες νωρίτερα ο Abel είχε πεθάνει από φυματίωση!

Evariste Galois (1811-1832)

Γάλλος Μαθηματικός, ο οποίος θεωρείται ο θεμελιωτής της θεωρίας Ομάδων.

Έζησε 21 χρόνια μόνο!

Ο Galois ήταν αυτός που έδωσε οριστική λύση στο διαχρονικό πρόβλημα των μαθηματικών, σχετικά με την επιλυσιμότητα των πολυωνυμικών εξισώσεων με ριζικά.

Evariste Galois (1811-1832)

Στάθηκε ιδιαίτερα άτυχος στην πορεία της ζωής του. Την πρώτη του εργασία την στέλνει στον Augustin Cauchy. Η εργασία ΧΑΝΕΤΑΙ!!!

Δίνει εξετάσεις για να εισαχθεί στην πολυτεχνική σχολή, αλλά αποτυγχάνει. Λέγεται ότι οι εξεταστές γελούσαν με τις απαντήσεις του!

Evariste Galois (1811-1832)

Εγγράφεται σε ακαδημία εκπαίδευσης δασκάλων και δημοσίων υπαλλήλων. Στέλνει άλλες τρεις εργασίες στον γραμματέα της ακαδημίας, τον Joseph Fourier με σκοπό να συμμετέχει σε διαγωνισμό της ακαδημίας. Ο Fourier πεθαίνει και ανάμεσα στα χαρτιά του δεν βρίσκονται οι εργασίες του Galois. ΞΑΝΑΧΑΝΟΝΤΑΙ!!! Για καλή του τύχη είχε κρατήσει αντίγραφα και τελικά τα σώζει το έργο του.

Στέλνει το χειρόγραφο που είχε στείλε στην ακαδημία στον διάσημο μαθηματικό Siméon Poisson.

Evariste Galois (1811-1832)

Ανήσυχο πνεύμα ο Galois και έντονα πολιτικοποιημένο, συλλαμβάνεται σε μία διαδήλωση και οδηγείται στην φυλακή. Εκεί μαθαίνει την απόρριψη του έργου του από τον Poisson. Ταυτόχρονα λόγω επιδημίας χολέρας μεταφέρεται με άλλους συγκρατούμενούς του σε σανατόριο.

Εκεί γνωρίζει την Stephanie Poterin, κόρη του γιατρού που τους επισκέπτεται και την ερωτεύεται παράφορα, αλλά δέχεται την απόρριψη.

Evariste Galois
(1811-1832)

Ο αρραβωνιαστικός της Stephanie, στρατιωτικός του Γαλλικού στρατού, λόγω ευθιξίας τον προκαλεί σε μονομαχία στις 30 Μαΐου 1832. Το προηγούμενο βράδυ ο Galois γράφει σε επιστολή στον Auguste Chevalier όλες τις ιδέες του που είχαν απορριφθεί τα προηγούμενα χρόνια παρακινώντας τον να τις στείλει σε μεγάλους μαθηματικούς της εποχής όπως ο Carl Friedrich Gauss και ο Jacob Jacobi ώστε να αντιληφθούν τη σπουδαιότητα των αποτελεσμάτων. Το άλλο πρωί ο Galois σκοτώνεται στη μονομαχία.

Evariste Galois (1811-1832)

Μερικά χρόνια αργότερα ο Joseph Liouville αναγνωρίζει, αρχικά την ορθότητα και έπειτα την τεράστια σημασία του έργου του Galois και το δημοσιεύει.

Η συνεισφορά του Galois στην επιλυσιμότητα πολυωνυμικών εξισώσεων με ριζικά

Στόχος είναι να ελέγξουμε εάν μία πολυωνυμική εξίσωση

$$f(x)=0$$

επιλύεται με ριζικά.

Ο Galois απέδειξε ότι: μία πολυωνυμική εξίσωση επιλύεται με ριζικά αν και μόνον αν η ομάδα Galois είναι επιλύσιμη.

Σας ευχαριστώ για την προσοχή σας!