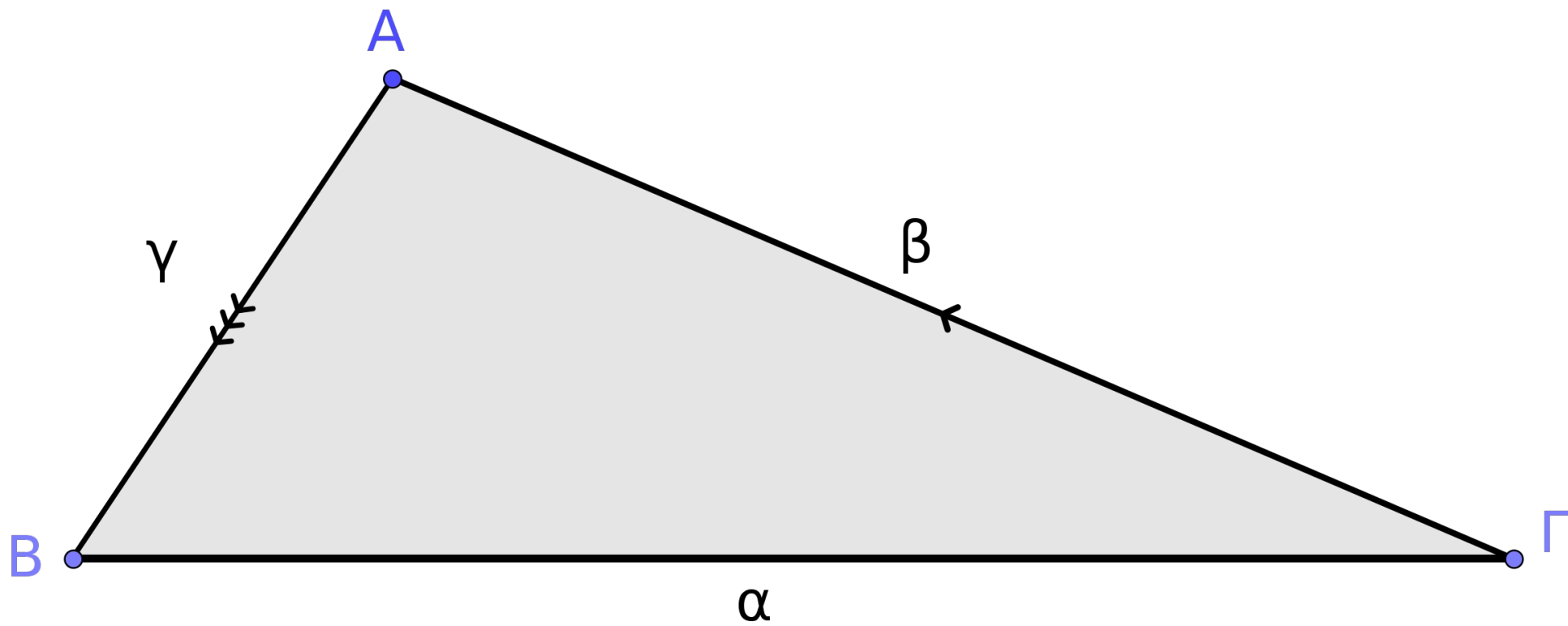


Μετρώντας τρίγωνα από τη Ρόδο στα Γιάννινα

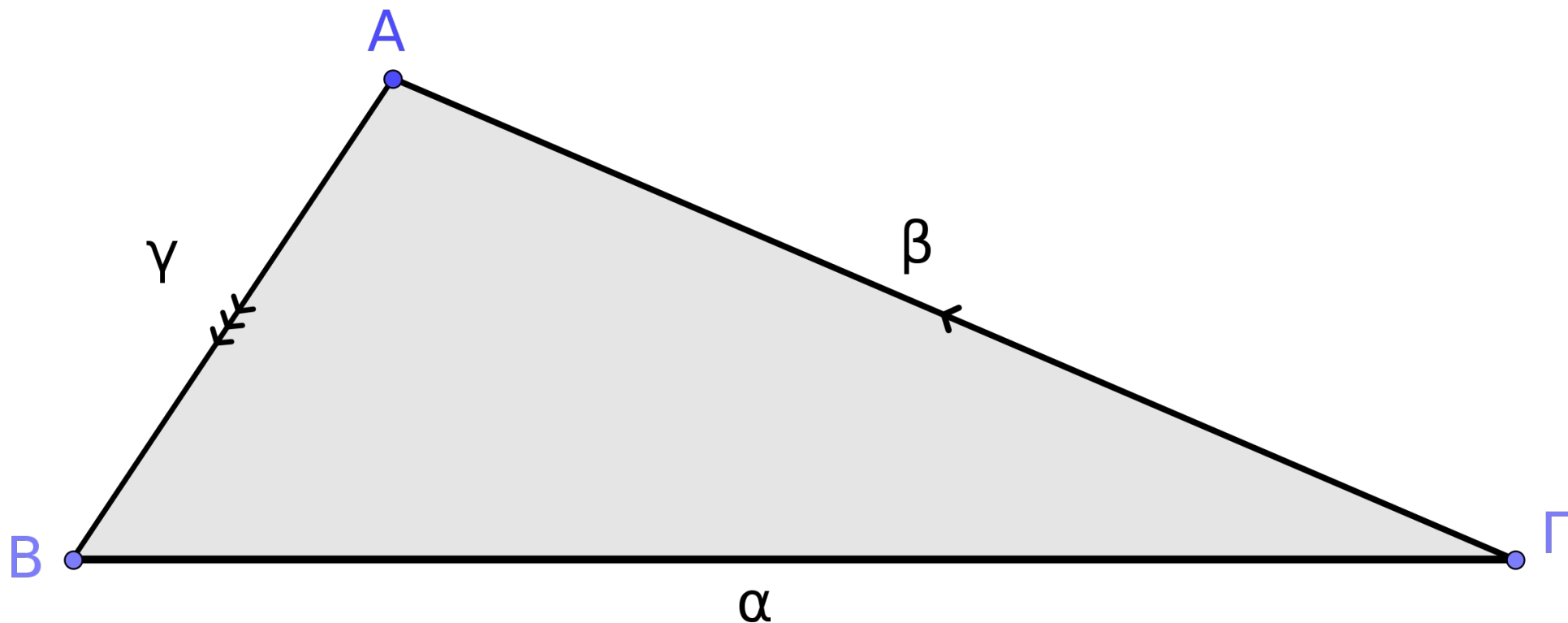


Σύντομη Ιστορία της Τριγωνομετρίας

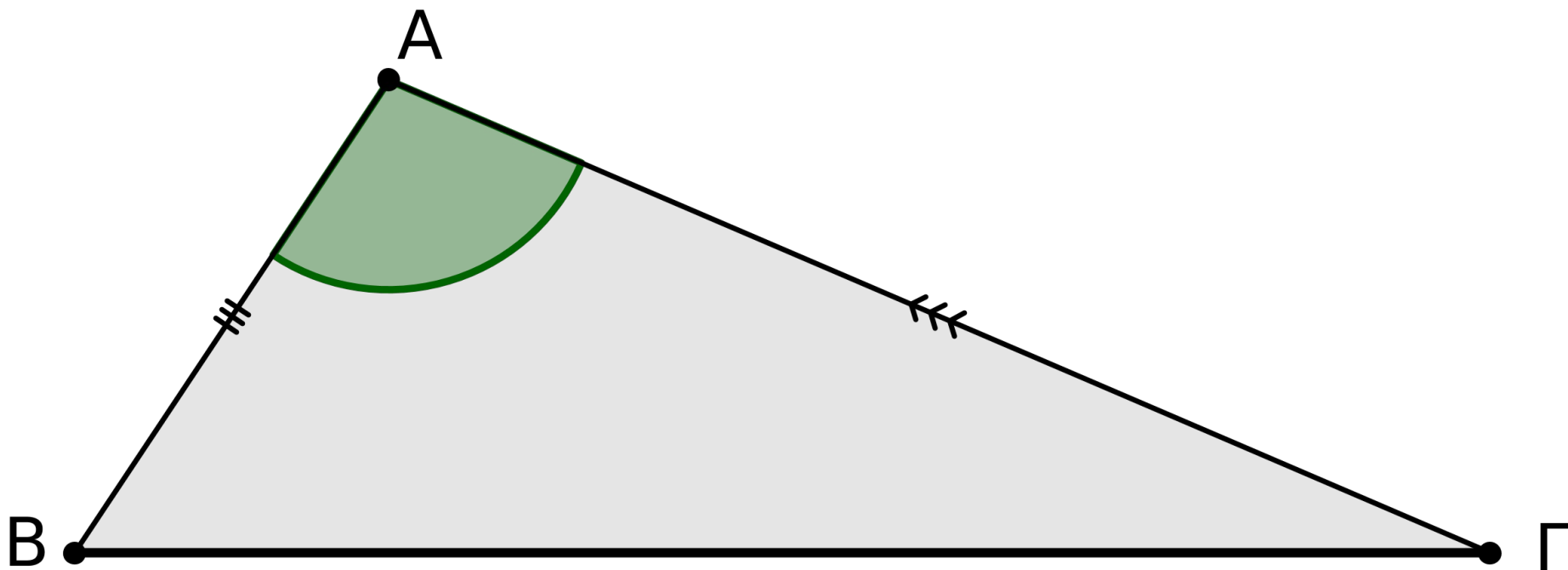
Τριγωνομετρία
(= τρίγωνο + μέτρον)
κλάδος των μαθηματικών
ασχολείται με τη μελέτη ειδικών
συναρτήσεων των γωνιών
και τις εφαρμογές τους
σε διάφορους υπολογισμούς,
όπως στην επίλυση τριγώνου
(δηλ. με τον προσδιορισμό άγνωστων
στοιχείων τριγώνου,
σε συνάρτηση πλευρών και γωνιών).



Νόμος Συνημιτόνων

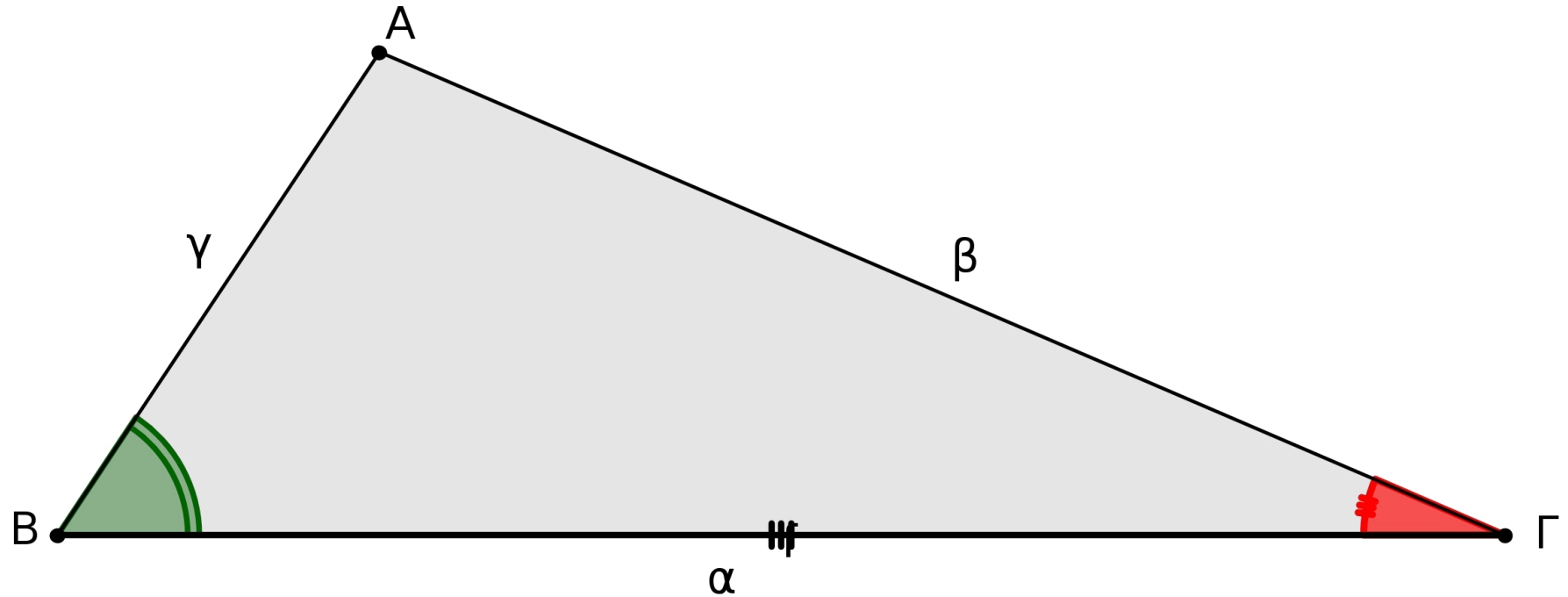


$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A$$



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A$$

Νόμος Ημιτόνων



$$\frac{\eta\mu A}{\alpha} = \frac{\eta\mu B}{\beta} = \frac{\eta\mu \Gamma}{\gamma}$$

Εφαρμογές Επίπεδης και Σφαιρικής Τριγωνομετρίας

- Μαθηματικά
- Φυσική
- Αστρονομία
- Γεωγραφία-Χαρτογραφία
- Μουσική
- Ακουστική
- Βιολογία
- Χημεία
- Σεισμολογία
- Μετεωρολογία
- Αρχιτεκτονική
- Ηλεκτρολογία και Μηχανολογία

- **Σουμέριοι**
- **Βαβυλώνιοι**
- **Θαλής ο Μιλήσιος** (640 π.Χ. - 546 π.Χ.)
μέτρησε τρίγωνα για να υπολογίσει το ύψος Πυραμίδων της Αιγύπτου.
- **Αρίσταρχος ο Σάμιος** (310 π.Χ. - 230 π.Χ.)
μέτρησε τρίγωνα για να υπολογίσει την απόσταση Ήλιου - Γης και Σελήνης – Γης.
- **Ερατοσθένης ο Κυρηναίος** (276 π.Χ. -194 π.Χ.) μέτρησε τρίγωνα για να υπολογίσει τις διαστάσεις της Γης.

**Πότε, πού και από ποιόν
γεννήθηκε
η Τριγωνομετρία;**

□ Πότε γεννήθηκε η Τριγωνομετρία;

Κάποια στιγμή στα **Ελληνιστικά Χρόνια**

Ελληνιστικά Χρόνια:

323 π.Χ. έως περίπου το 415 μ.Χ.

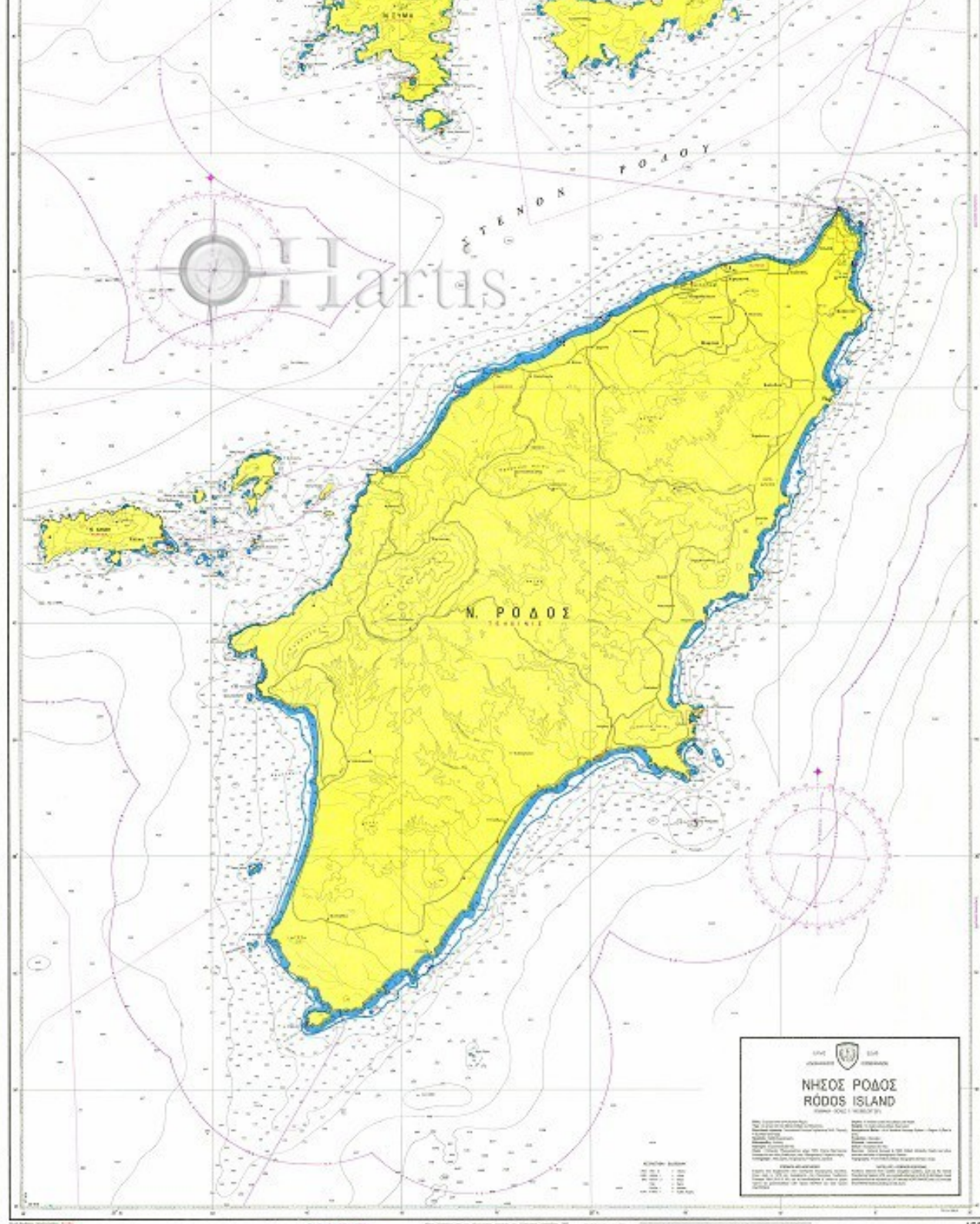
Χρυσή περίοδος

323 π.Χ. - 150 π.Χ.

- Ευκλείδης από την Αλεξάνδρεια
- Κτησίβιος από την Αλεξάνδρεια
- Ηρόφιλος από τη Χαλκηδόνα
- Αρίσταρχος από τη Σάμο
- Ερατοσθένης από την Κυρήνη
- Χρύσιππος ο Αθηναίος
- Απολλώνιος από την Πέργη
- Αρχιμήδης από τις Συρακούσες
- Ίππαρχος από τη Νίκαια

**Πού γεννήθηκε
η Τριγωνομετρία;**

Ρόδος

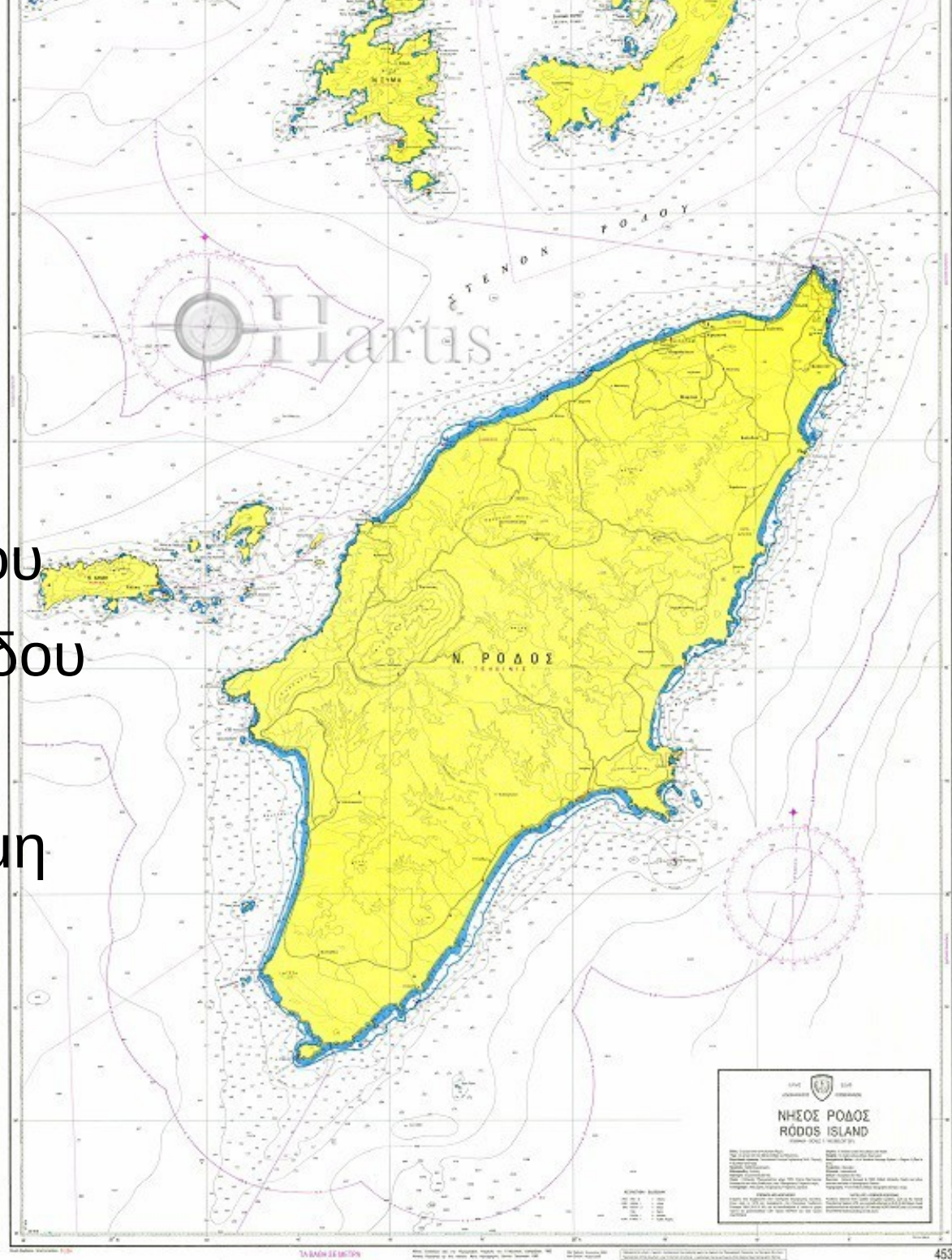


Ρόδος

408 π.Χ.

Κάτοικοι της Ιαλυσού,
της Καμίρου και της Λίνδου
ιδρύουν την πόλη της Ρόδου

Μεγάλη οικονομική δύναμη
με σημαντικό εμπορικό
και πολεμικό στόλο





Μασσαλία

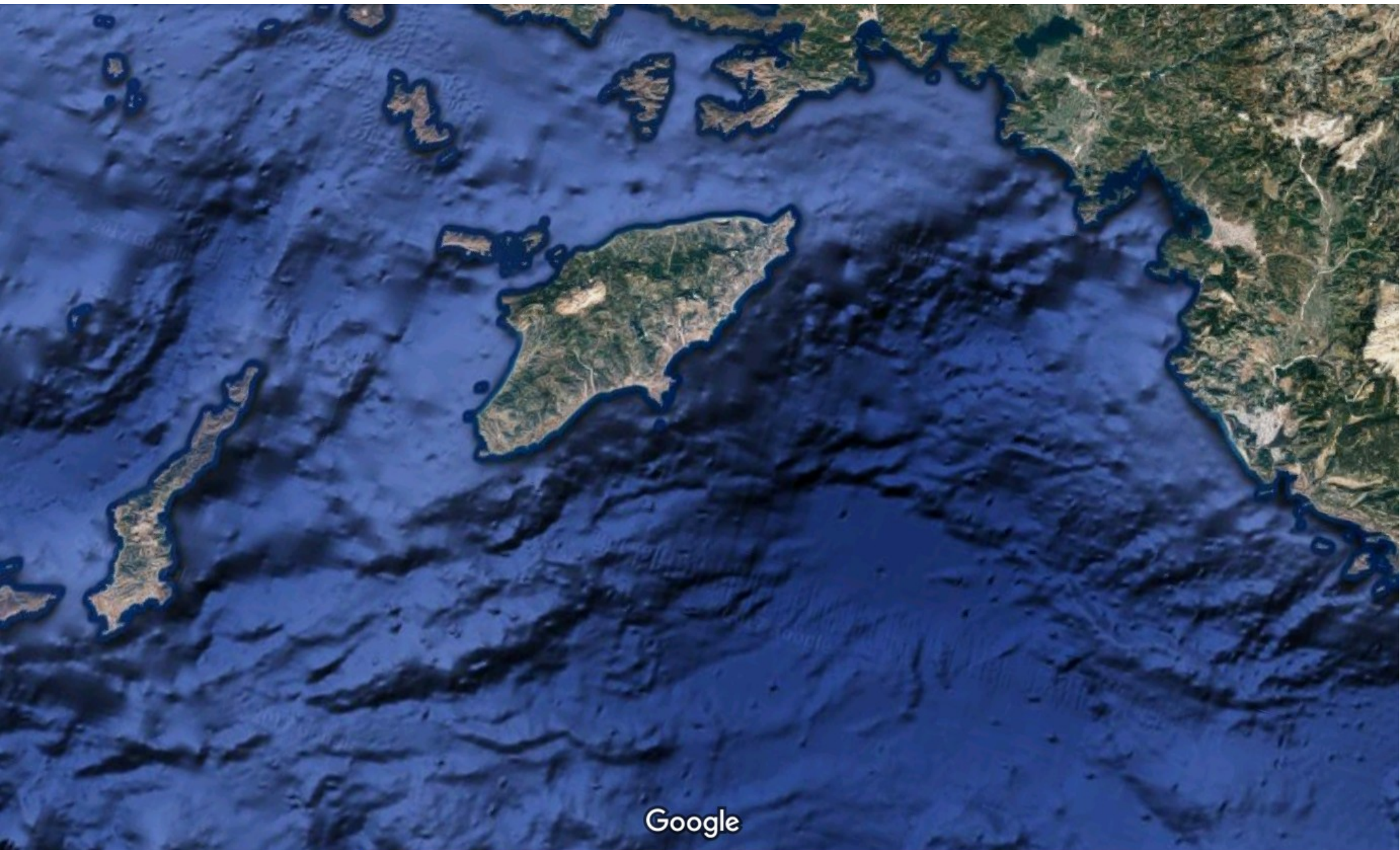
Κύζικος

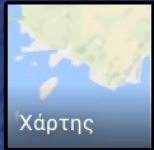
Ρόδος

Αλεξάνδρεια









Google

Γιατί στη Ρόδο;

Εφαρμογές της Τριγωνομετρίας σε

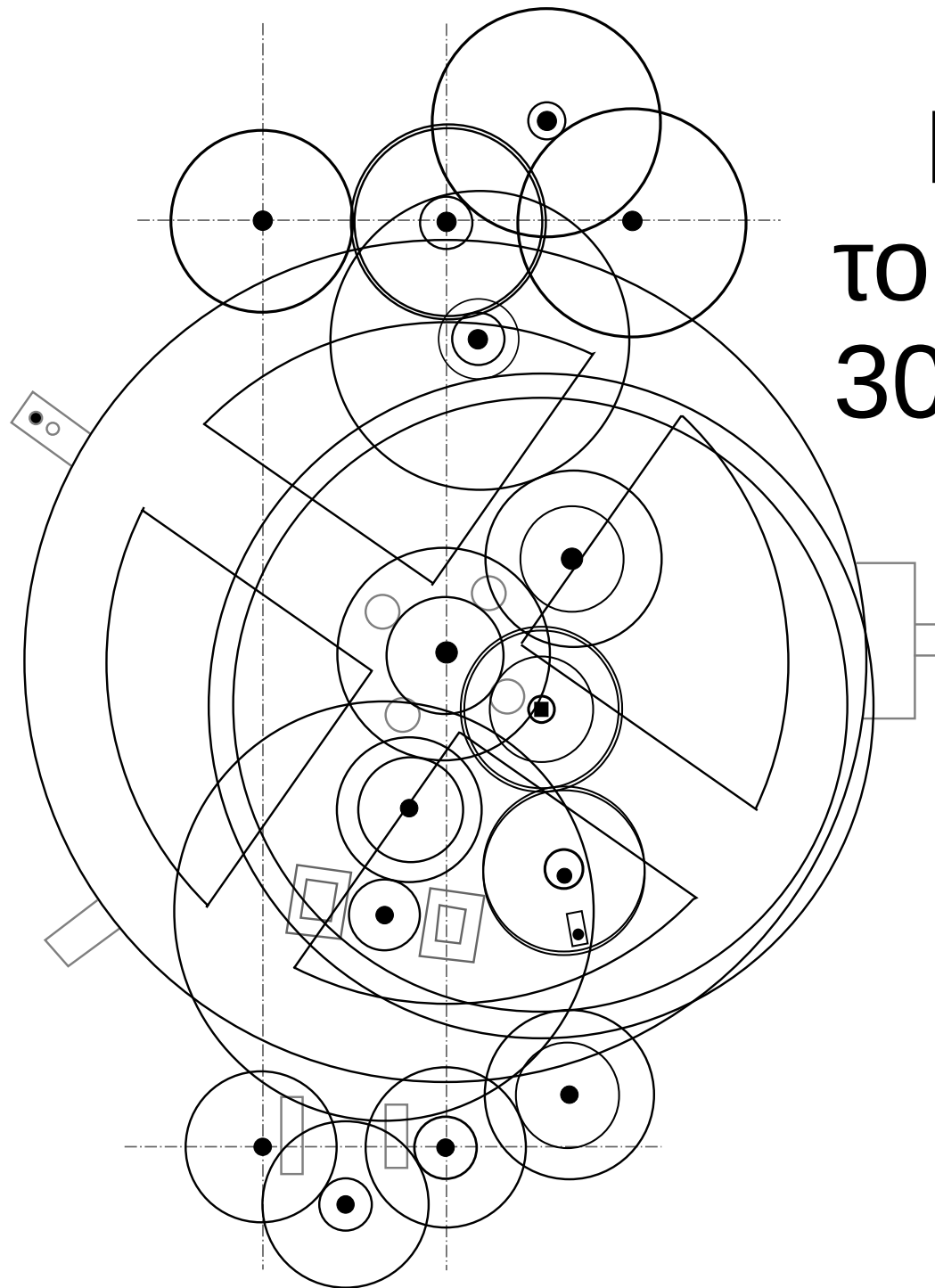
- Αρχιτεκτονική
- Αστρονομία
- Χαρτογραφία
- Ναυπηγική
- Κατασκευή Οργάνων Ναυσιπλοΐας
- Κατασκευή Μηχανών

Μηχανισμός των Αντικυθήρων

- Ανασύρθηκε το 1901 από ναυάγιο Ροδίτικου πλοίου ανοικτά της νήσου Αντικύθηρα.
- Κατασκευάστηκε κάπου ανάμεσα στο 150 π.Χ. με 80 π.Χ. το πιθανότερο σε εργαστήριο της Ρόδου





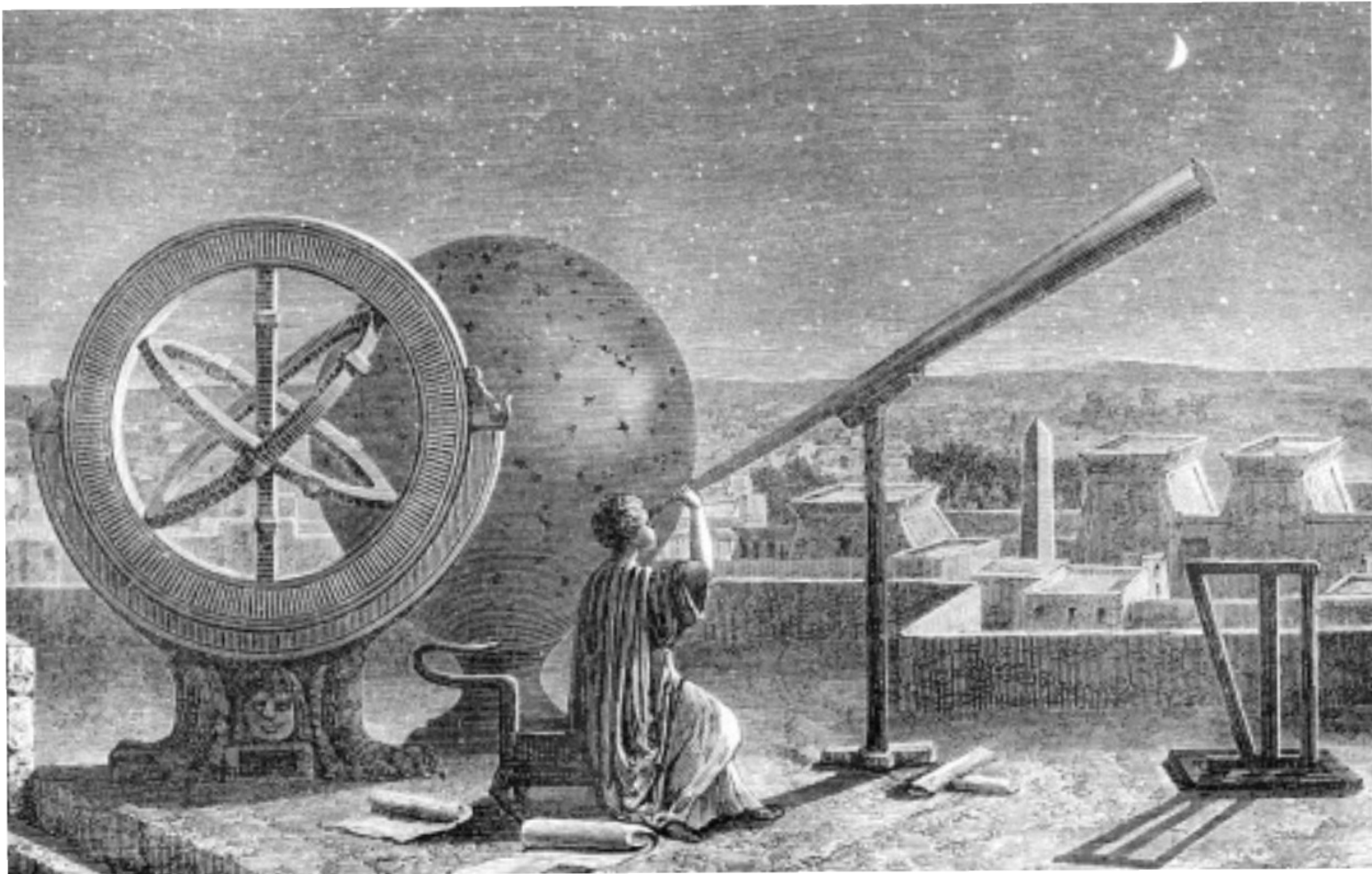


Περιείχε
τουλάχιστον
30 γρανάζια

**Από ποιόν
γεννήθηκε
η Τριγωνομετρία;**

Ίππαρχος

190-120 π.Χ. Νίκαια της Βιθυνίας
ο μεγαλύτερος αστρονόμος της αρχαιότητας











Ίππαρχος

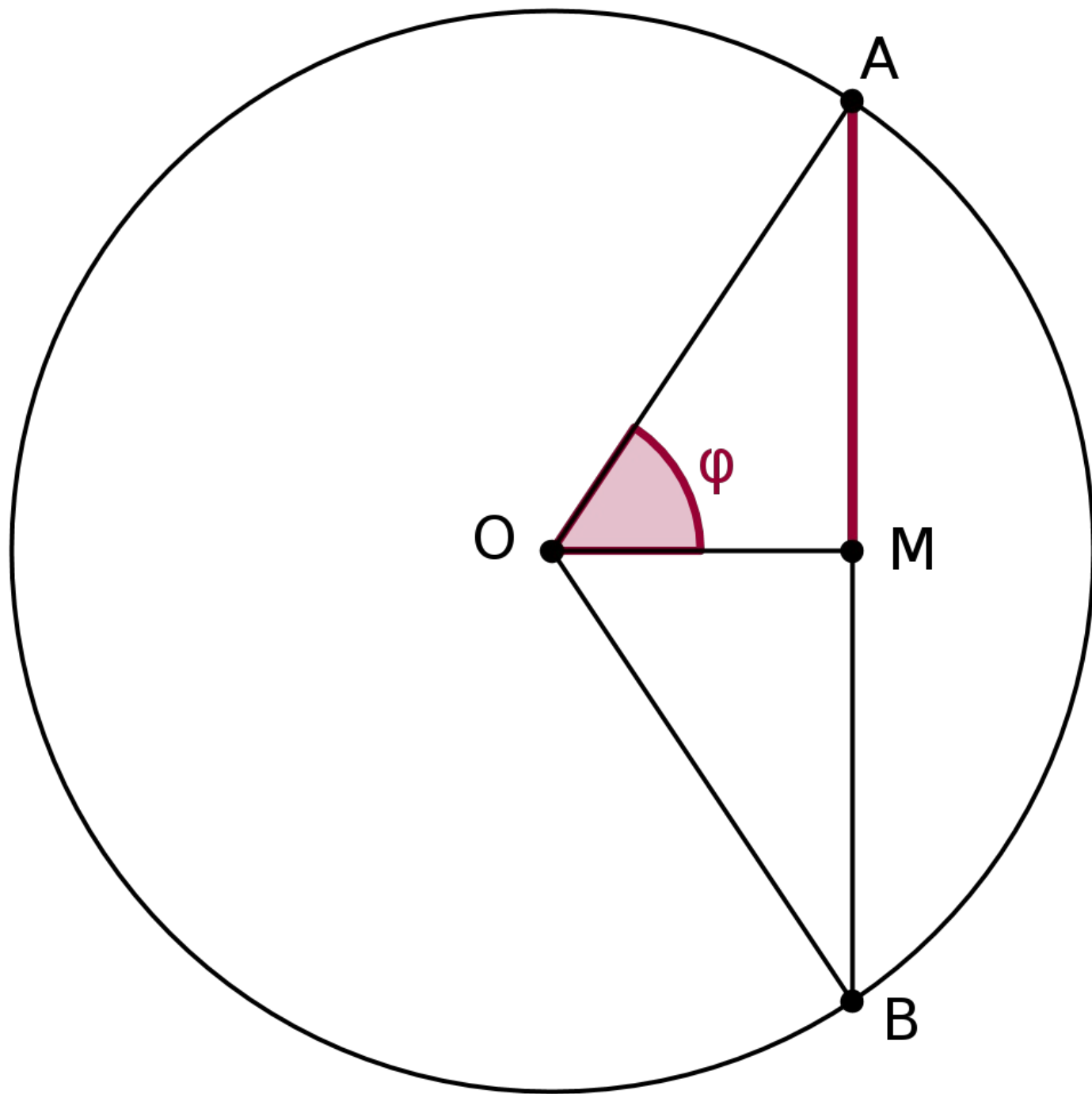
Αστρονόμος, χαρτογράφος, μαθηματικός

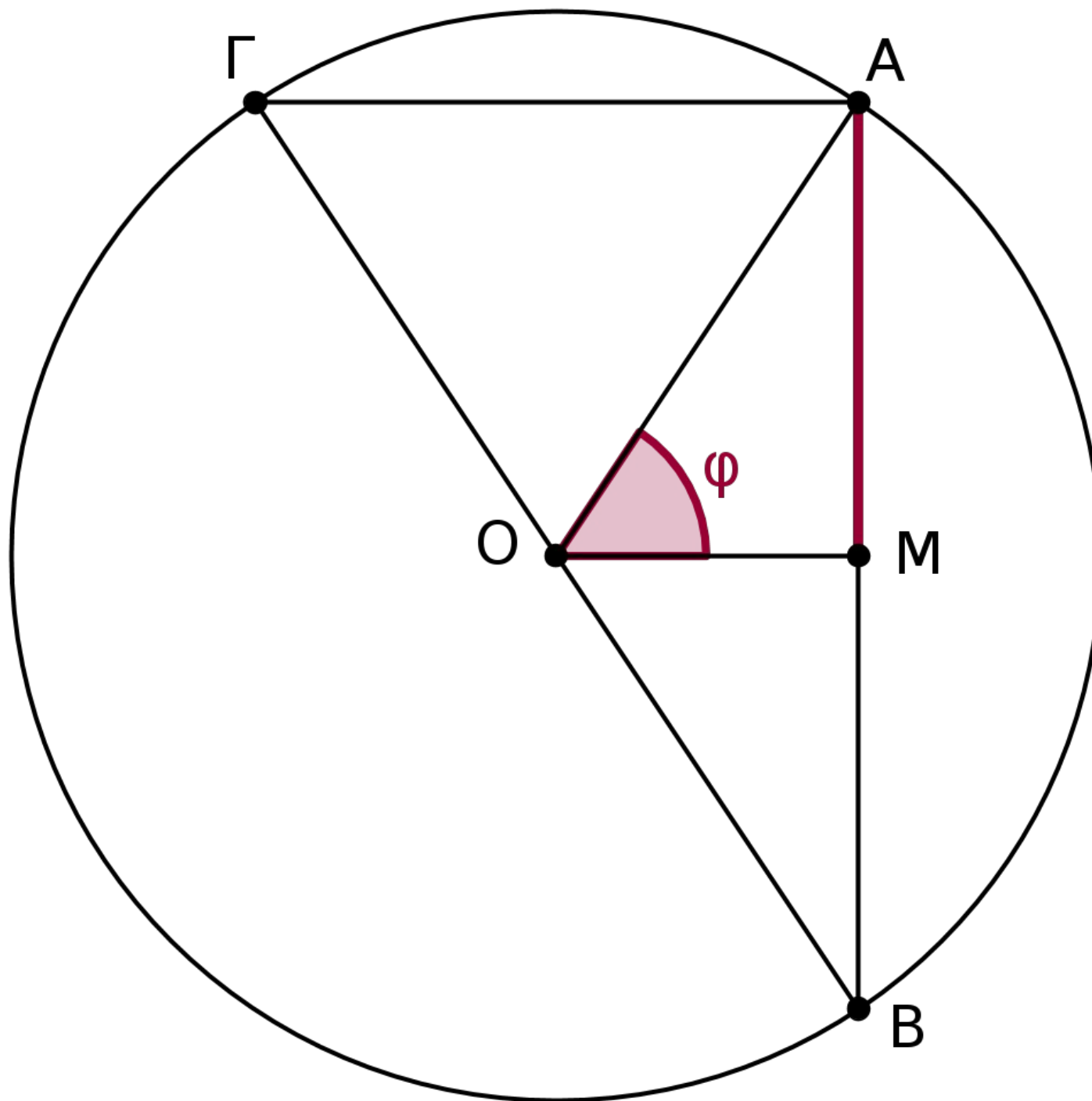
- Μετάπτωση των ισημεριών
απειροελάχιστη κίνηση του άξονα της Γης
με περίοδο 25.800 χρόνια
- Έτος 365,242 ημέρες (365,242199)
- Κατάλογος 1022 άστρων
- Θεμελιωτής της Τριγωνομετρίας

Τριγωνομετρικός πίνακας

ω	ημω	συνω	εφω	σφω	ω	ημω	συνω	εφω	σφω
0 °	0,0000000	1,0000000	0,0000000		45 °	0,7071068	0,7071068	1,0000000	1,0000000
1 °	0,0174524	0,9998477	0,0174551	57,2899616	46 °	0,7193398	0,6946584	1,0355303	0,9656888
2 °	0,0348995	0,9993908	0,0349208	28,6362533	47 °	0,7313537	0,6819984	1,0723687	0,9325151
3 °	0,0523360	0,9986295	0,0524078	19,0811367	48 °	0,7431448	0,6691306	1,1106125	0,9004040
4 °	0,0697565	0,9975641	0,0699268	14,3006663	49 °	0,7547096	0,6560590	1,1503684	0,8692867
5 °	0,0871557	0,9961947	0,0874887	11,4300523	50 °	0,7660444	0,6427876	1,1917536	0,8390996
6 °	0,1045285	0,9945219	0,1051042	9,5143645	51 °	0,7771460	0,6293204	1,2348972	0,8097840
7 °	0,1218693	0,9925462	0,1227846	8,1443464	52 °	0,7880108	0,6156615	1,2799416	0,7812856
8 °	0,1391731	0,9902681	0,1405408	7,1153697	53 °	0,7986355	0,6018150	1,3270448	0,7535541
9 °	0,1564345	0,9876883	0,1583844	6,3137515	54 °	0,8090170	0,5877853	1,3763819	0,7265425
10 °	0,1736482	0,9848078	0,1763270	5,6712818	55 °	0,8191520	0,5735764	1,4281480	0,7002075
11 °	0,1908090	0,9816272	0,1943803	5,1445540	56 °	0,8290376	0,5591929	1,4825610	0,6745085
12 °	0,2079117	0,9781476	0,2125566	4,7046301	57 °	0,8386706	0,5446390	1,5398650	0,6494076
13 °	0,2249511	0,9743701	0,2308682	4,3314759	58 °	0,8480481	0,5299193	1,6003345	0,6248694
14 °	0,2419219	0,9702957	0,2493280	4,0107809	59 °	0,8571673	0,5150381	1,6642795	0,6008606
15 °	0,2588190	0,9659258	0,2679492	3,7320508	60 °	0,8660254	0,5000000	1,7320508	0,5773503
16 °	0,2756374	0,9612617	0,2867454	3,4874144	61 °	0,8746197	0,4848096	1,8040478	0,5543091
17 °	0,2923717	0,9563048	0,3057307	3,2708526	62 °	0,8829476	0,4694716	1,8807265	0,5317094
18 °	0,3090170	0,9510565	0,3249197	3,0776835	63 °	0,8910065	0,4539905	1,9626105	0,5095254
19 °	0,3255682	0,9455186	0,3443276	2,9042109	64 °	0,8987940	0,4383711	2,0503038	0,4877326
20 °	0,3420201	0,9396926	0,3639702	2,7474774	65 °	0,9063078	0,4226183	2,1445069	0,4663077
21 °	0,3583679	0,9335804	0,3838640	2,6050891	66 °	0,9135455	0,4067366	2,2460368	0,4452287
22 °	0,3746066	0,9271839	0,4040262	2,4750869	67 °	0,9205049	0,3907311	2,3558524	0,4244748
23 °	0,3907311	0,9205049	0,4244748	2,3558524	68 °	0,9271839	0,3746066	2,4750869	0,4040262
24 °	0,4067366	0,9135455	0,4452287	2,2460368	69 °	0,9335804	0,3583679	2,6050891	0,3838640
25 °	0,4226183	0,9063078	0,4663077	2,1445069	70 °	0,9396926	0,3420201	2,7474774	0,3639702
26 °	0,4383711	0,8987940	0,4877326	2,0503038	71 °	0,9455186	0,3255682	2,9042109	0,3443276
27 °	0,4539905	0,8910065	0,5095254	1,9626105	72 °	0,9510565	0,3090170	3,0776835	0,3249197
28 °	0,4694716	0,8829476	0,5317094	1,8807265	73 °	0,9563048	0,2923717	3,2708526	0,3057307
29 °	0,4848096	0,8746197	0,5543091	1,8040478	74 °	0,9612617	0,2756374	3,4874144	0,2867454
30 °	0,5000000	0,8660254	0,5773503	1,7320508	75 °	0,9659258	0,2588190	3,7320508	0,2679492
31 °	0,5150381	0,8571673	0,6008606	1,6642795	76 °	0,9702957	0,2419219	4,0107809	0,2493280
32 °	0,5299193	0,8480481	0,6248694	1,6003345	77 °	0,9743701	0,2249511	4,3314759	0,2308682
33 °	0,5446390	0,8386706	0,6494076	1,5398650	78 °	0,9781476	0,2079117	4,7046301	0,2125566
34 °	0,5591929	0,8290376	0,6745085	1,4825610	79 °	0,9816272	0,1908090	5,1445540	0,1943803
35 °	0,5735764	0,8191520	0,7002075	1,4281480	80 °	0,9848078	0,1736482	5,6712818	0,1763270
36 °	0,5877853	0,8090170	0,7265425	1,3763819	81 °	0,9876883	0,1564345	6,3137515	0,1583844
37 °	0,6018150	0,7986355	0,7535541	1,3270448	82 °	0,9902681	0,1391731	7,1153697	0,1405408
38 °	0,6156615	0,7880108	0,7812856	1,2799416	83 °	0,9925462	0,1218693	8,1443464	0,1227846
39 °	0,6293204	0,7771460	0,8097840	1,2348972	84 °	0,9945219	0,1045285	9,5143645	0,1051042
40 °	0,6427876	0,7660444	0,8390996	1,1917536	85 °	0,9961947	0,0871557	11,4300523	0,0874887
41 °	0,6560590	0,7547096	0,8692867	1,1503684	86 °	0,9975641	0,0697565	14,3006663	0,0699268
42 °	0,6691306	0,7431448	0,9004040	1,1106125	87 °	0,9986295	0,0523360	19,0811367	0,0524078
43 °	0,6819984	0,7313537	0,9325151	1,0723687	88 °	0,9993908	0,0348995	28,6362533	0,0349208
44 °	0,6946584	0,7193398	0,9656888	1,0355303	89 °	0,9998477	0,0174524	57,2899616	0,0174551
45 °	0,7071068	0,7071068	1,0000000	1,0000000	90 °	1,0000000	0,0000000	#####	0,0000000

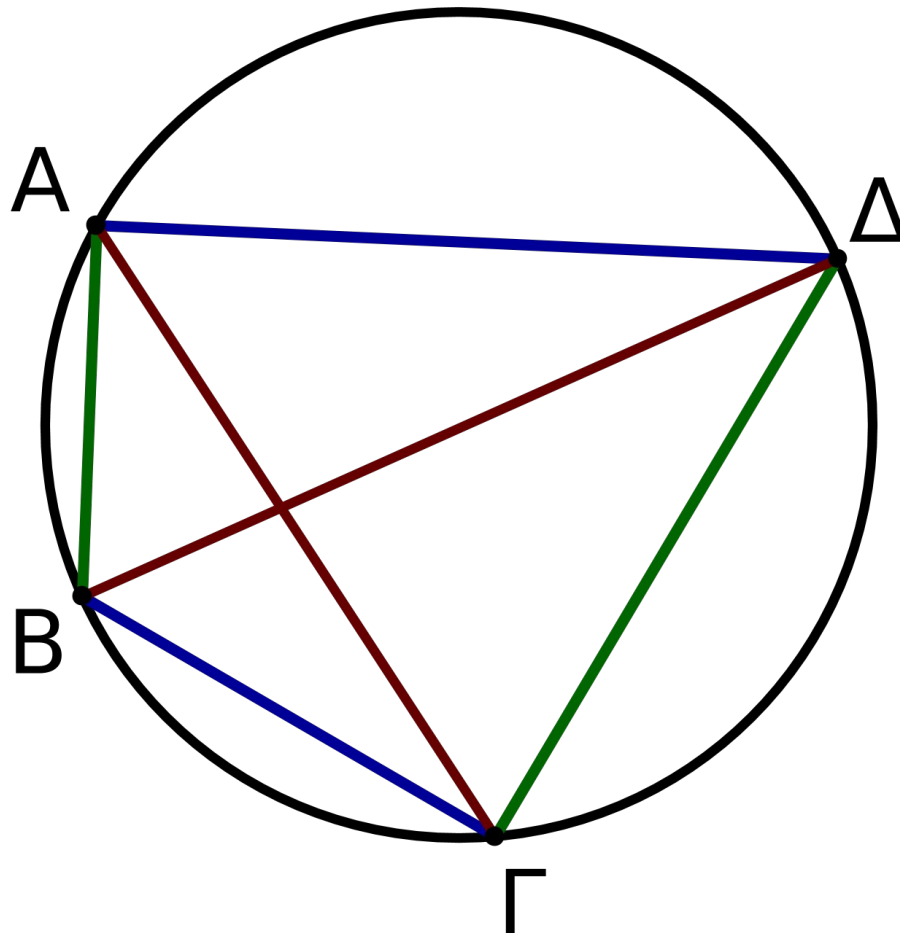
**Πώς υπολόγισε ο Ίππαρχος
τον τριγωνομετρικό πίνακα
των χορδών;**



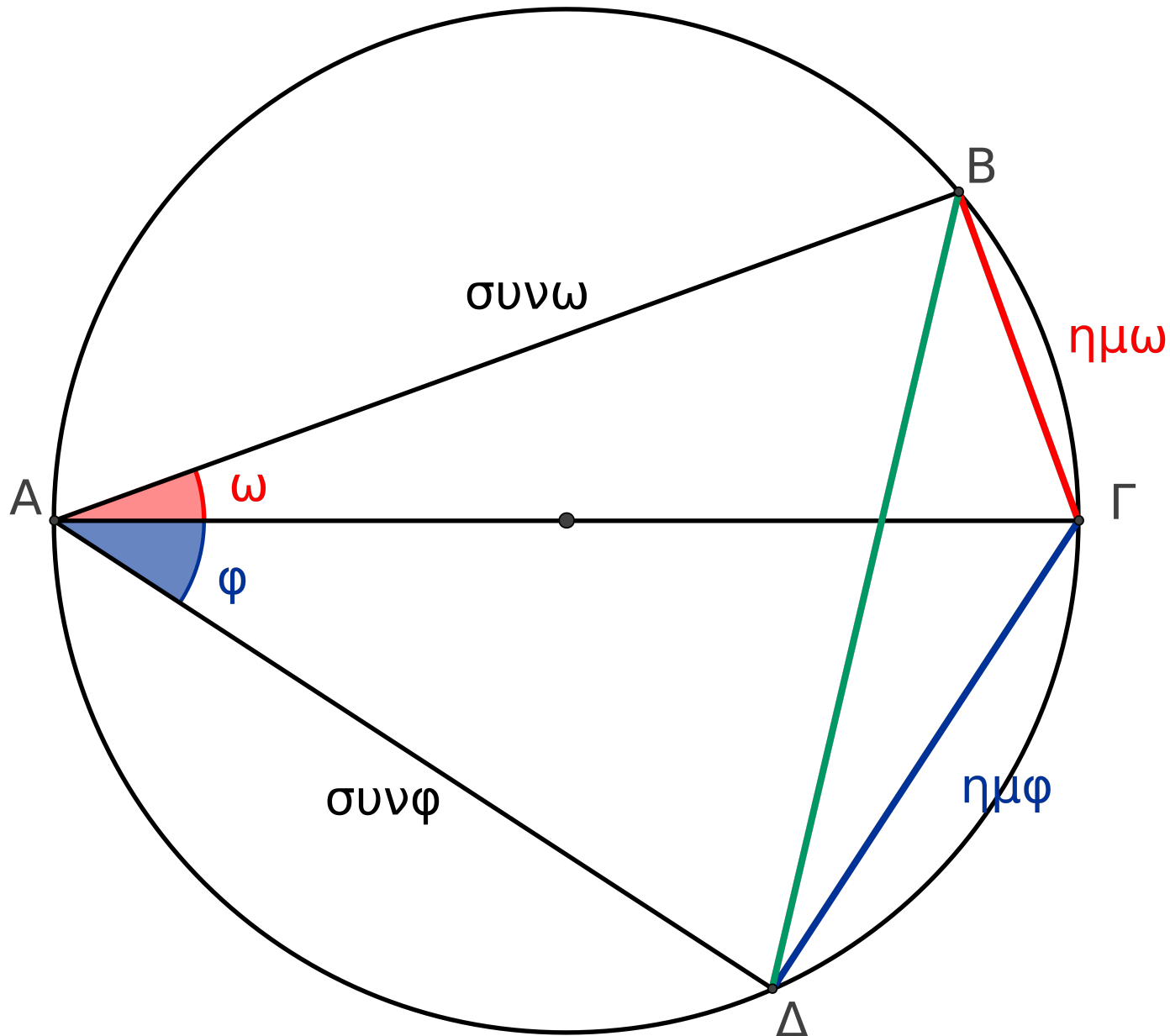


Θεώρημα Πτολεμαίου

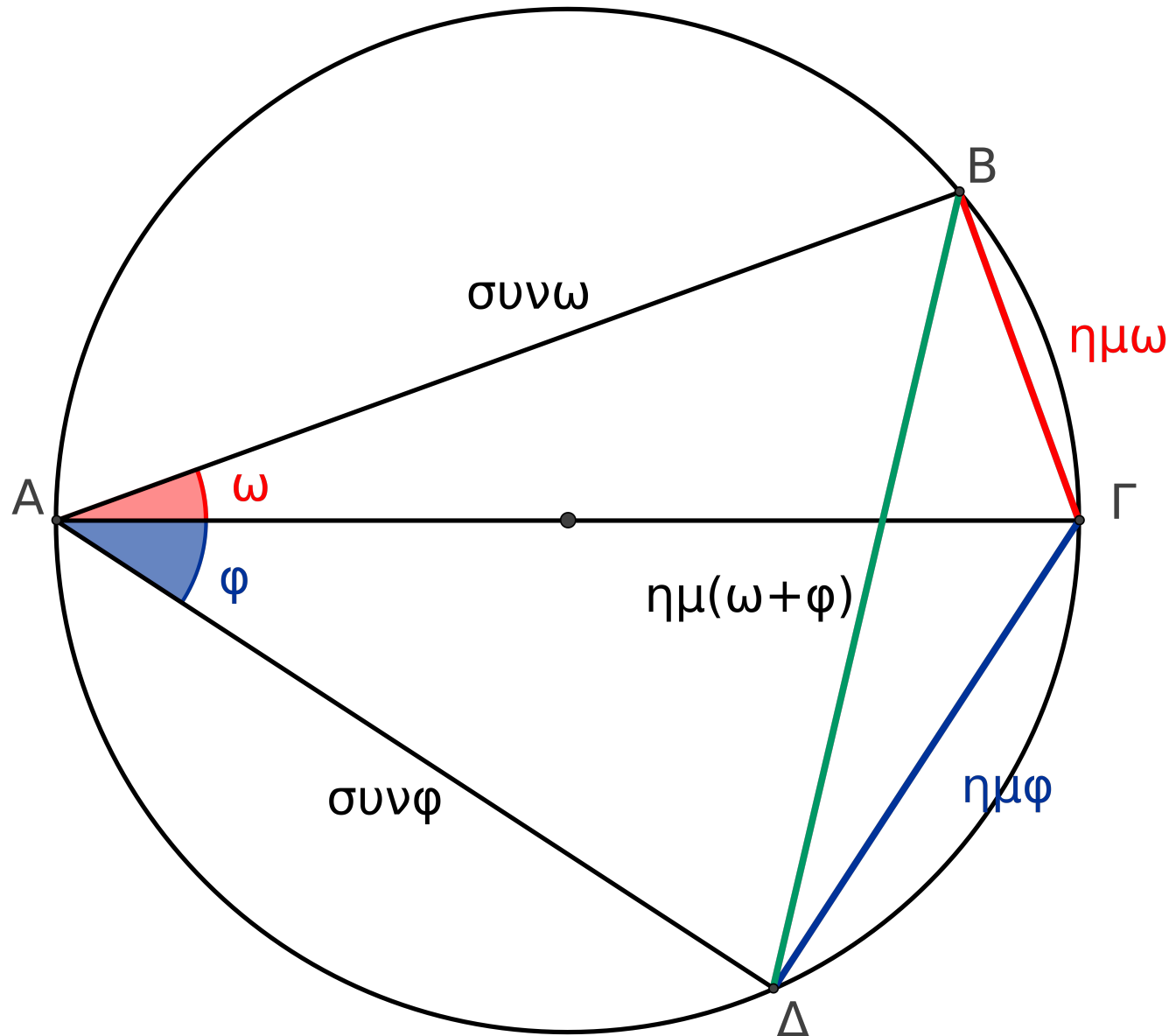
$$ΑΓ \cdot ΒΔ = ΑΒ \cdot ΓΔ + ΑΔ \cdot ΒΓ$$



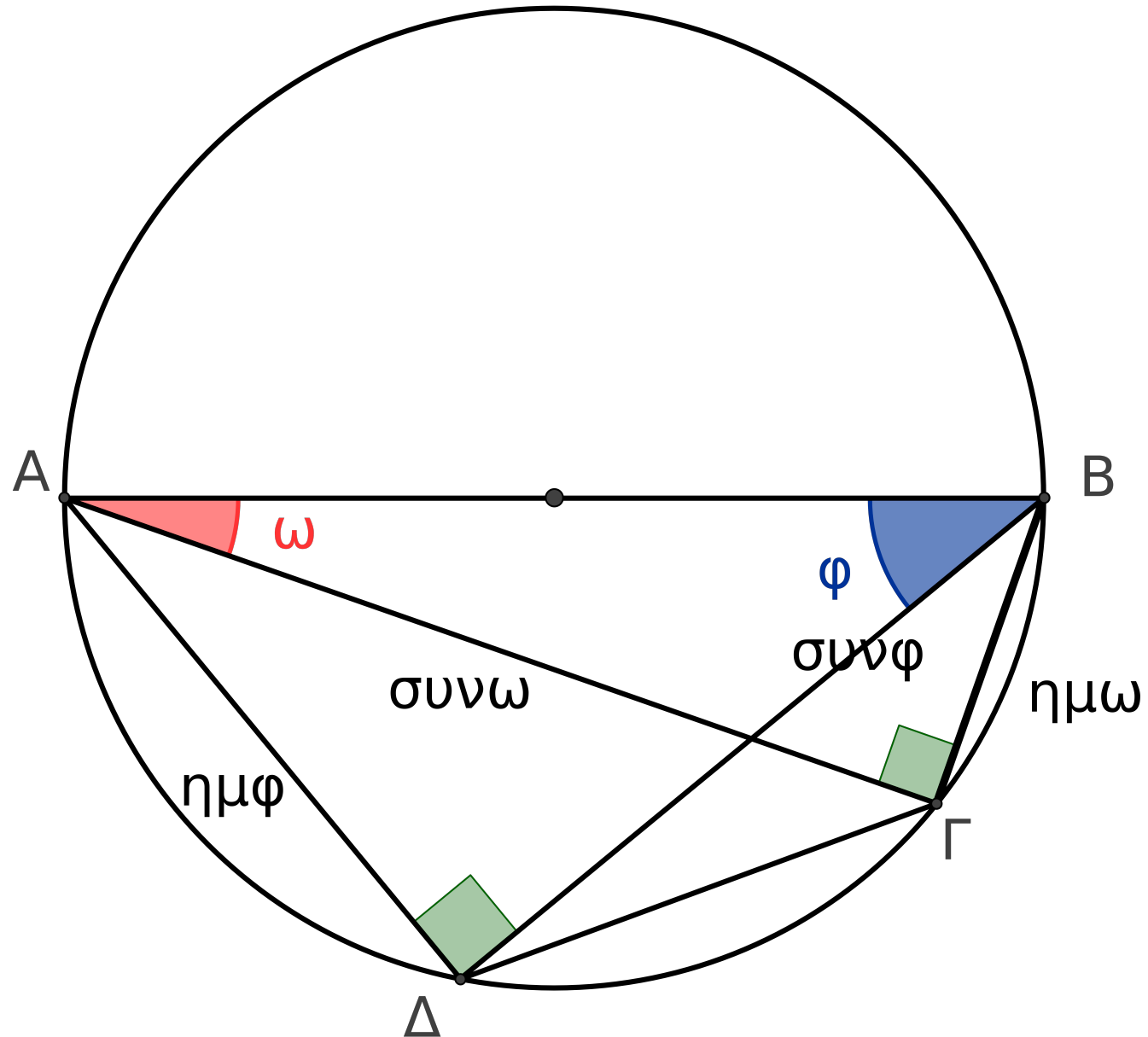
$$\eta\mu(\omega+\varphi) = \sigma\upsilon\nu\varphi \eta\mu\omega + \eta\mu\varphi \sigma\upsilon\nu\omega$$



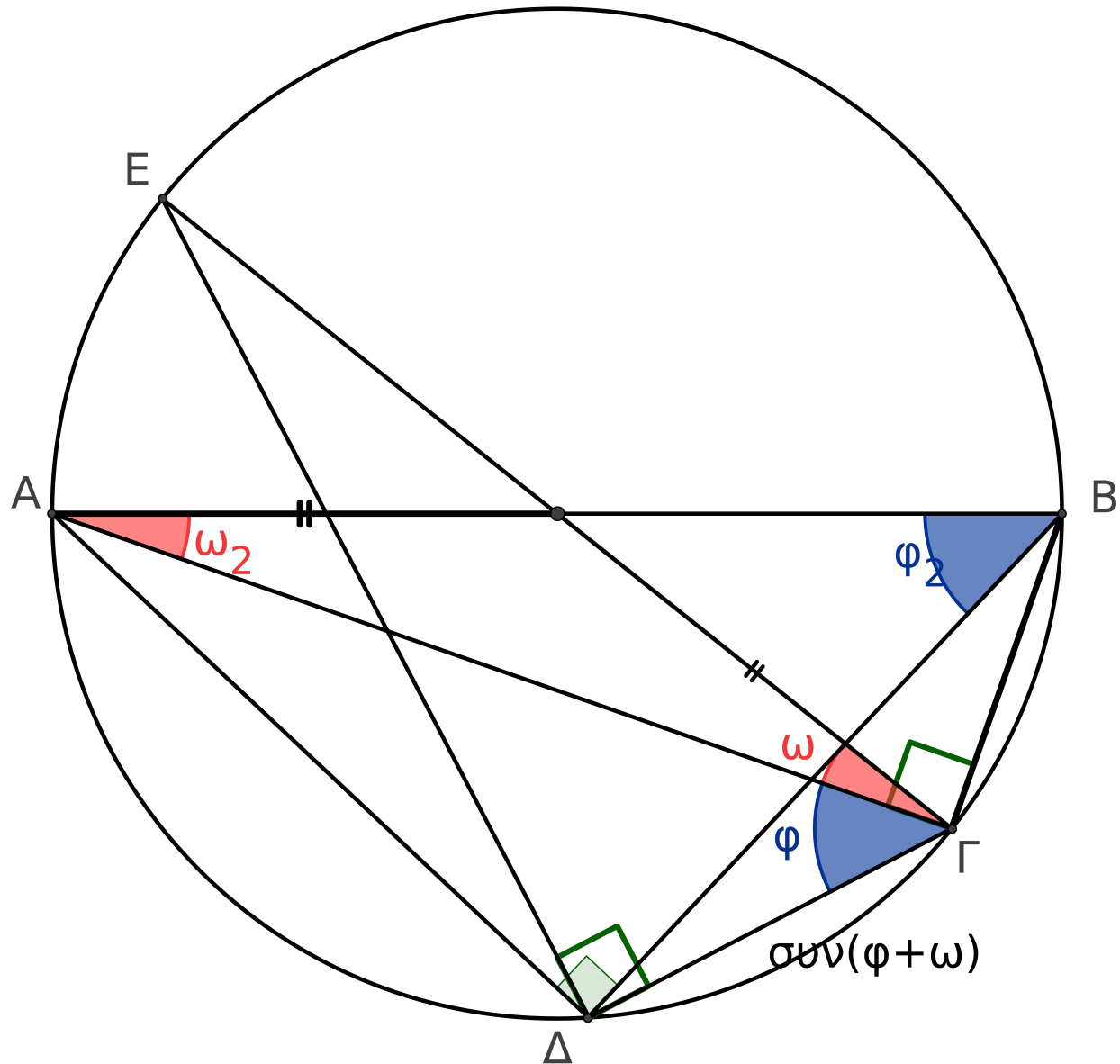
$$\eta\mu(\omega+\varphi) = \sigma\upsilon\nu\varphi \eta\mu\omega + \eta\mu\varphi \sigma\upsilon\nu\omega$$



$$\Gamma\Delta + \eta\mu\varphi \ \eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\omega \ \sigma\upsilon\nu\varphi$$



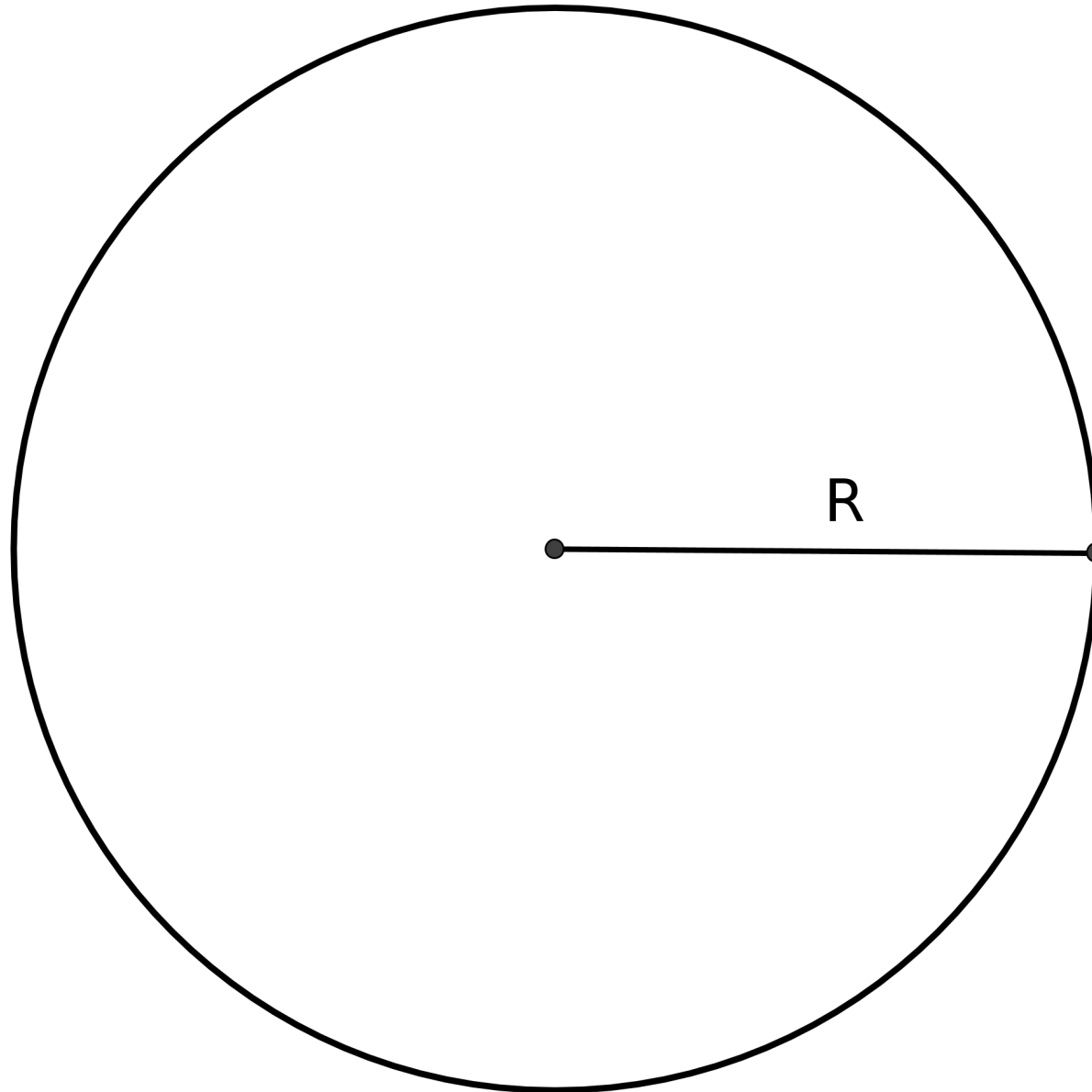
$$\sigma_{\text{UV}}(\omega+\varphi) = \sigma_{\text{UV}}\omega \sigma_{\text{UV}}\varphi - \eta_{\text{UV}}\omega \eta_{\text{UV}}\varphi$$



$$\sigma_{\nu\nu}2\theta = 1 - 2\eta\mu^2\theta$$

Πίνακας Χορδών

$$R = 3438$$



3438

$$2\pi R = 21600 = 360 \cdot 60$$

$$R = 3437,74677078$$

$$3^{\circ} \text{ και } 45' = 225'$$

Χορδή τόξου 225
,

έχει μήκος σχεδόν 225

σε κύκλο ακτίνας $R = 3438$

Ο Θέωνας ο Αλεξανδρεύς ισχυρίζεται ότι

ο Ίππαρχος έγραψε 12 βιβλία Τριγωνομετρίας



Μενέλαος από την Αλεξάνδρεια

70 - 140 μ.Χ.

Αστρονόμος

Το μοναδικό βιβλίο του

που σώθηκε είναι

τα Σφαιρικά

M E N E L A I

S P H A E R I C O R U M

L I B R I I I I.

Quos olim, collatis MSS. *Hebræis* &
Arabiciis, Typis exprimendos curavit
Vir Cl. Ed. HALLEIUS L.L.D.
R.S.S. & Geometriæ Profeffor Savil.
Oxonienfis.

Præfationem addidit

G. COSTARD, A. M.

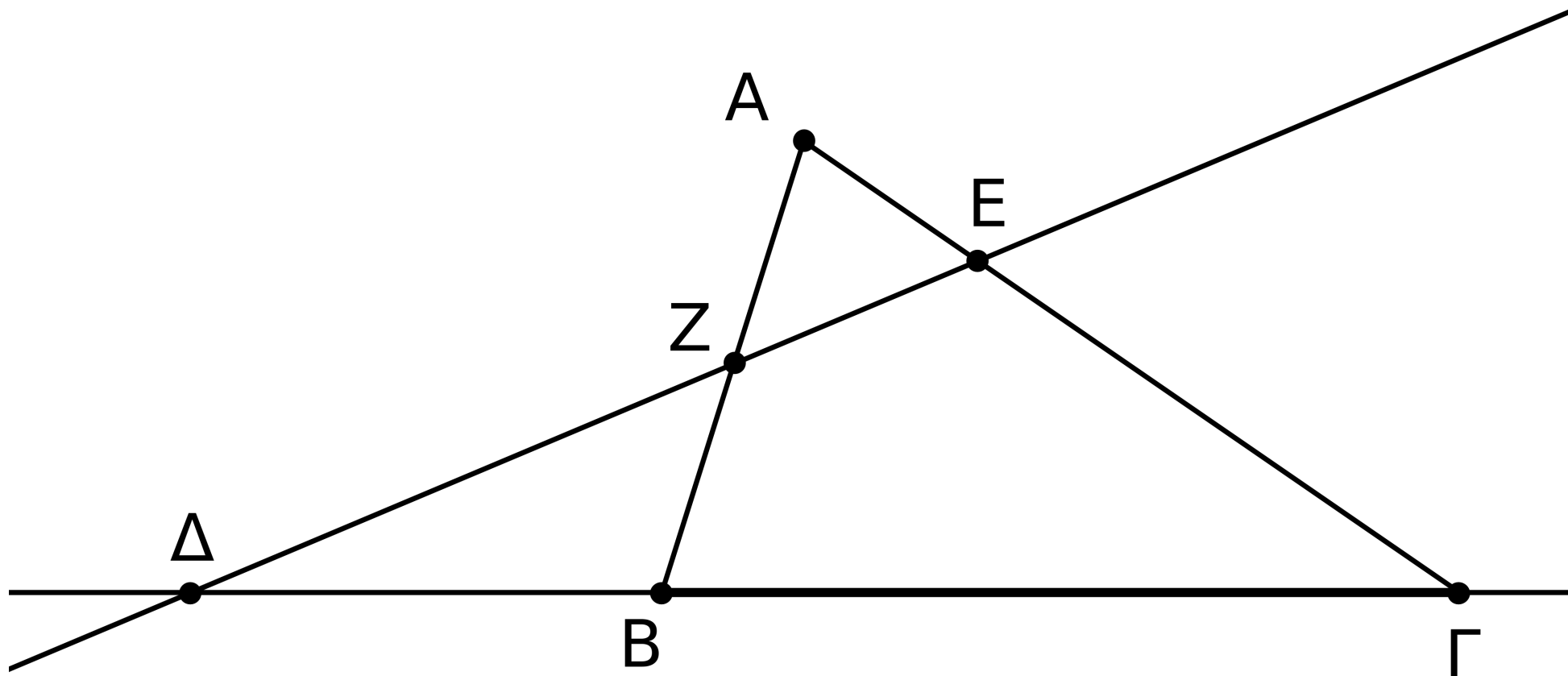
O X O N I I,

SUMPTIBUS ACADEMICIS,

M DCC LVIII.



$$AZ \cdot B\Delta \cdot \Gamma E = AE \cdot BZ \cdot \Gamma \Delta$$



Κλαύδιος Πτολεμαίος (100 π.Χ. - 160 π.Χ)

Μεγίστη Μαθηματική σύνταξις
(Αλμαγέστη)

Το σημαντικότερο βιβλίο Αστρονομίας
για περισσότερα από 1500 χρόνια

1843. - In preparing for my present course in
 teaching a class of well behaved scholars, I felt the
 necessity of a text book in arithmetic, and I
 accordingly compiled this. It is an original work,
 designed to contain a series of lessons, and to
 be used in a systematic manner. It is intended
 to be used in a school, and is not a treatise on
 arithmetic. It is a book of exercises, and is
 intended to be used in a school, and is not a
 treatise on arithmetic. It is a book of exercises,
 and is intended to be used in a school.



1. *De la nature de la vieillesse.*
 2. *De la cause de la vieillesse.*
 3. *De la cure de la vieillesse.*
 4. *De la vieillesse en general.*
 5. *De la vieillesse en particulier.*
 6. *De la vieillesse en France.*
 7. *De la vieillesse en Europe.*
 8. *De la vieillesse en Asie.*
 9. *De la vieillesse en Afrique.*
 10. *De la vieillesse en Amerique.*
 11. *De la vieillesse en Australie.*
 12. *De la vieillesse en Antarctique.*
 13. *De la vieillesse en Arctique.*
 14. *De la vieillesse en Antarctique.*
 15. *De la vieillesse en Arctique.*
 16. *De la vieillesse en Antarctique.*
 17. *De la vieillesse en Arctique.*
 18. *De la vieillesse en Antarctique.*
 19. *De la vieillesse en Arctique.*
 20. *De la vieillesse en Antarctique.*
 21. *De la vieillesse en Arctique.*
 22. *De la vieillesse en Antarctique.*
 23. *De la vieillesse en Arctique.*
 24. *De la vieillesse en Antarctique.*
 25. *De la vieillesse en Arctique.*
 26. *De la vieillesse en Antarctique.*
 27. *De la vieillesse en Arctique.*
 28. *De la vieillesse en Antarctique.*
 29. *De la vieillesse en Arctique.*
 30. *De la vieillesse en Antarctique.*
 31. *De la vieillesse en Arctique.*
 32. *De la vieillesse en Antarctique.*
 33. *De la vieillesse en Arctique.*
 34. *De la vieillesse en Antarctique.*
 35. *De la vieillesse en Arctique.*
 36. *De la vieillesse en Antarctique.*
 37. *De la vieillesse en Arctique.*
 38. *De la vieillesse en Antarctique.*
 39. *De la vieillesse en Arctique.*
 40. *De la vieillesse en Antarctique.*
 41. *De la vieillesse en Arctique.*
 42. *De la vieillesse en Antarctique.*
 43. *De la vieillesse en Arctique.*
 44. *De la vieillesse en Antarctique.*
 45. *De la vieillesse en Arctique.*
 46. *De la vieillesse en Antarctique.*
 47. *De la vieillesse en Arctique.*
 48. *De la vieillesse en Antarctique.*
 49. *De la vieillesse en Arctique.*
 50. *De la vieillesse en Antarctique.*
 51. *De la vieillesse en Arctique.*
 52. *De la vieillesse en Antarctique.*
 53. *De la vieillesse en Arctique.*
 54. *De la vieillesse en Antarctique.*
 55. *De la vieillesse en Arctique.*
 56. *De la vieillesse en Antarctique.*
 57. *De la vieillesse en Arctique.*
 58. *De la vieillesse en Antarctique.*
 59. *De la vieillesse en Arctique.*
 60. *De la vieillesse en Antarctique.*
 61. *De la vieillesse en Arctique.*
 62. *De la vieillesse en Antarctique.*
 63. *De la vieillesse en Arctique.*
 64. *De la vieillesse en Antarctique.*
 65. *De la vieillesse en Arctique.*
 66. *De la vieillesse en Antarctique.*
 67. *De la vieillesse en Arctique.*
 68. *De la vieillesse en Antarctique.*
 69. *De la vieillesse en Arctique.*
 70. *De la vieillesse en Antarctique.*
 71. *De la vieillesse en Arctique.*
 72. *De la vieillesse en Antarctique.*
 73. *De la vieillesse en Arctique.*
 74. *De la vieillesse en Antarctique.*
 75. *De la vieillesse en Arctique.*
 76. *De la vieillesse en Antarctique.*
 77. *De la vieillesse en Arctique.*
 78. *De la vieillesse en Antarctique.*
 79. *De la vieillesse en Arctique.*
 80. *De la vieillesse en Antarctique.*
 81. *De la vieillesse en Arctique.*
 82. *De la vieillesse en Antarctique.*
 83. *De la vieillesse en Arctique.*
 84. *De la vieillesse en Antarctique.*
 85. *De la vieillesse en Arctique.*
 86. *De la vieillesse en Antarctique.*
 87. *De la vieillesse en Arctique.*
 88. *De la vieillesse en Antarctique.*
 89. *De la vieillesse en Arctique.*
 90. *De la vieillesse en Antarctique.*
 91. *De la vieillesse en Arctique.*
 92. *De la vieillesse en Antarctique.*
 93. *De la vieillesse en Arctique.*
 94. *De la vieillesse en Antarctique.*
 95. *De la vieillesse en Arctique.*
 96. *De la vieillesse en Antarctique.*
 97. *De la vieillesse en Arctique.*
 98. *De la vieillesse en Antarctique.*
 99. *De la vieillesse en Arctique.*
 100. *De la vieillesse en Antarctique.*

[illegible][illegible]

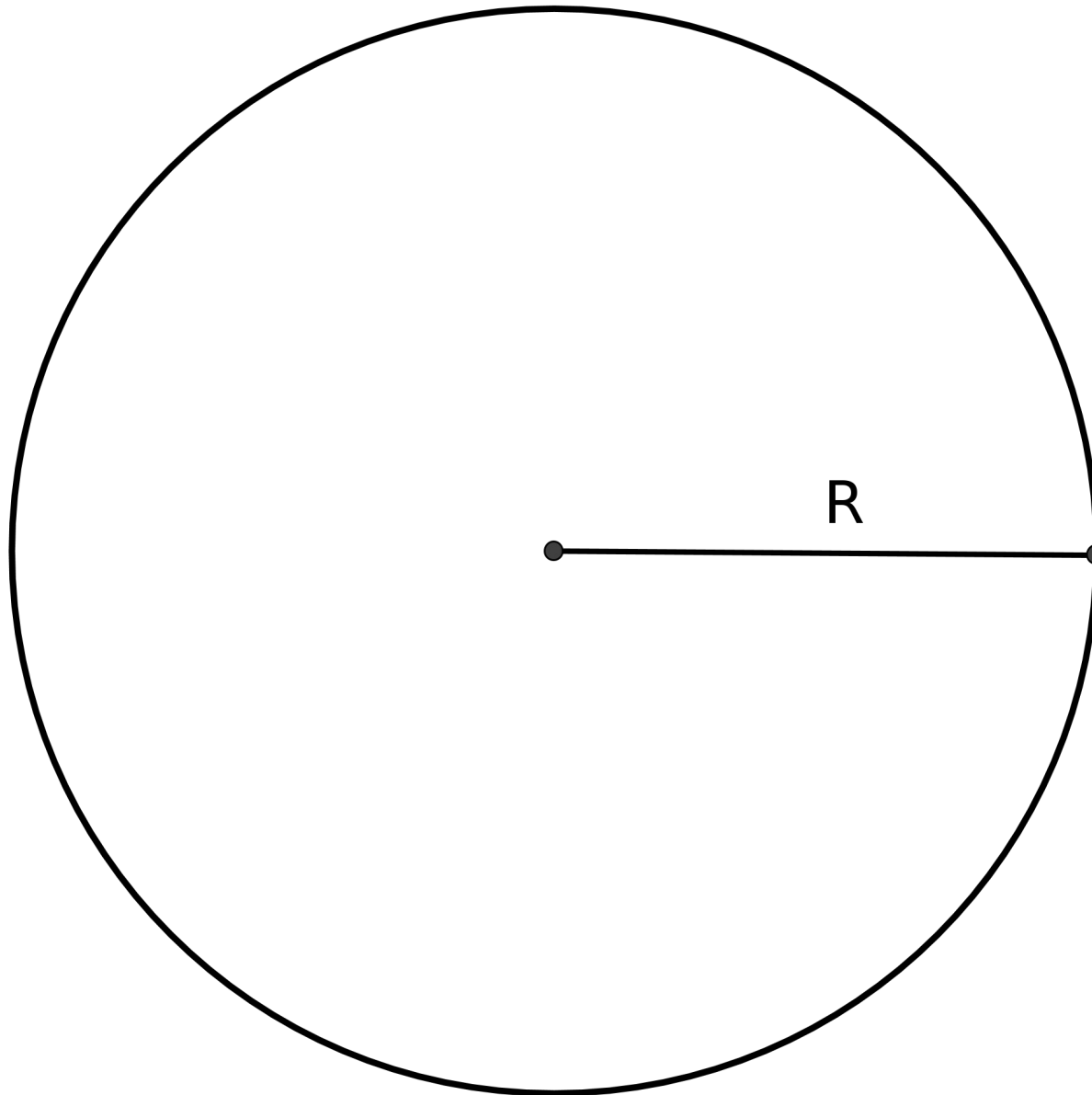
10

The image shows a single page from the Voynich manuscript, featuring approximately 12 lines of text. The script is a complex, undeciphered system of symbols. The page is numbered '10' in the upper right corner. The handwriting is consistent throughout, with some variations in the size and spacing of the symbols. The paper appears to be old, with some discoloration and wear visible at the edges.

Πτολεμαίος

- **Κανόνιον των εν κύκλω ευθειών**
(τριγωνομετρικός πίνακας με τα μήκη των χορδών τόξων του κύκλου ανά μισή μοίρα)
- **Υποτεινόμενες ευθείες ---- χορδές**

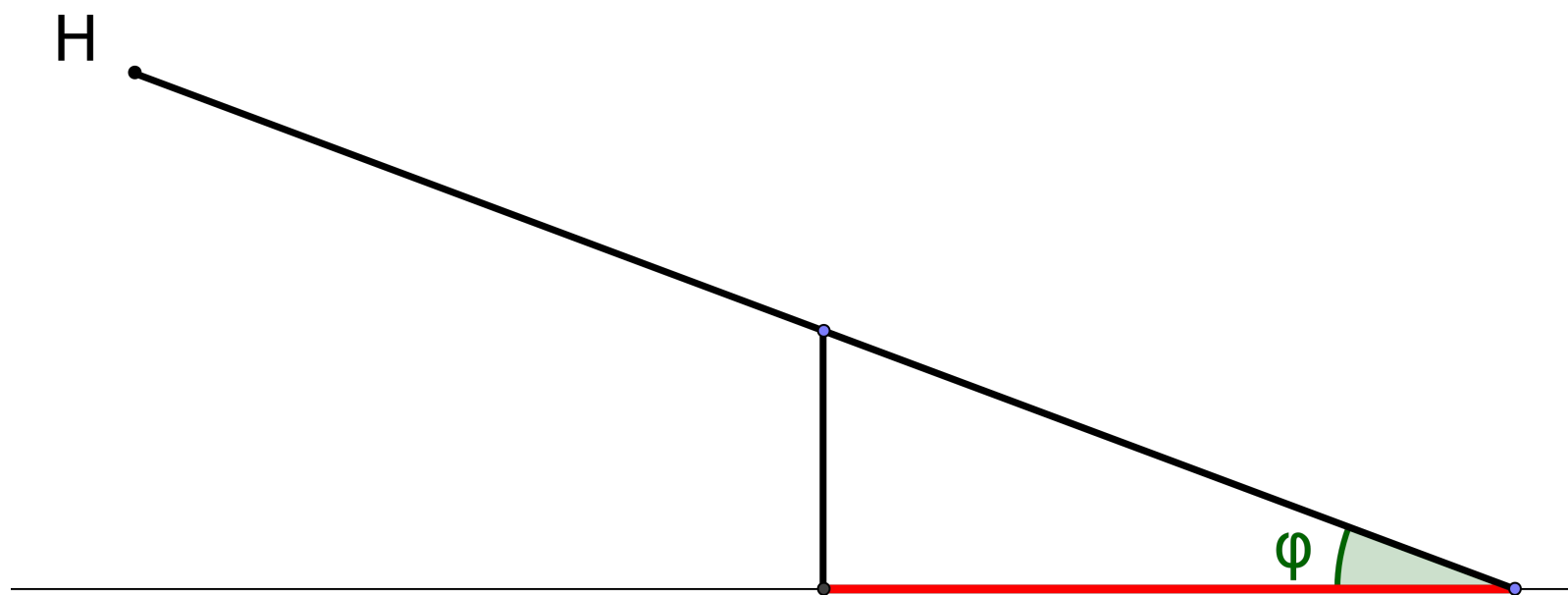
$$R = 60$$



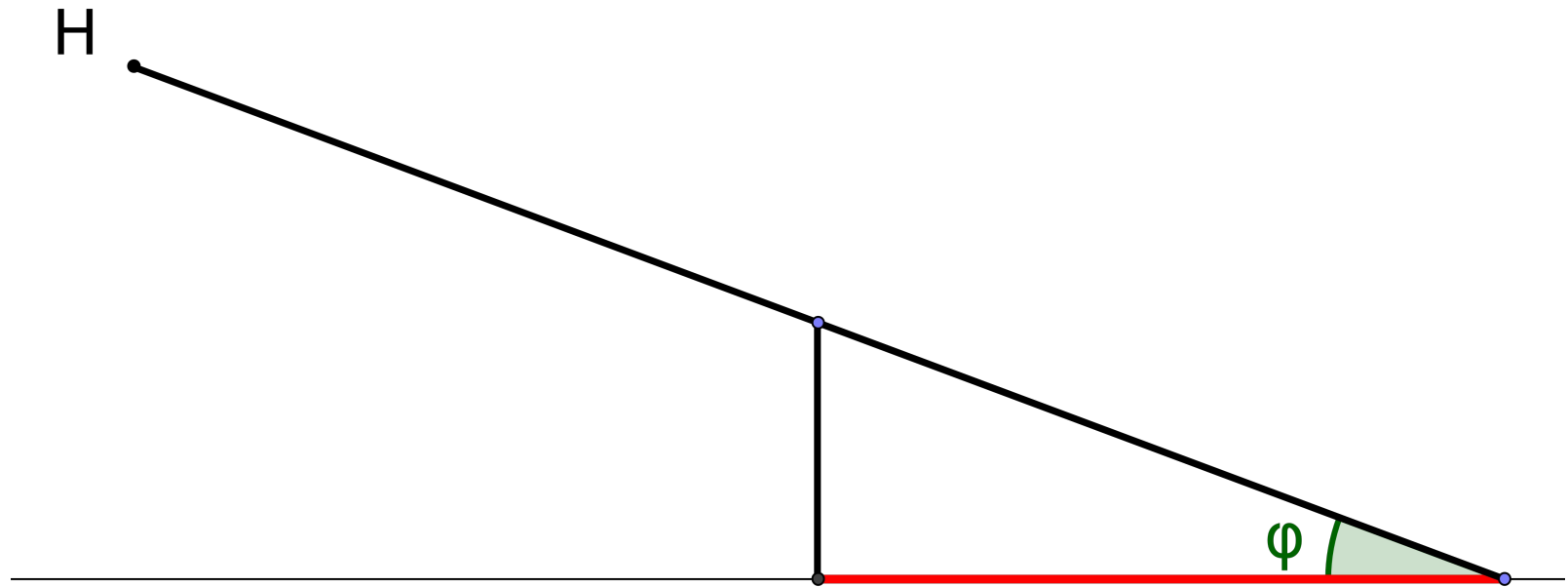
ΙΝΔΙΑ

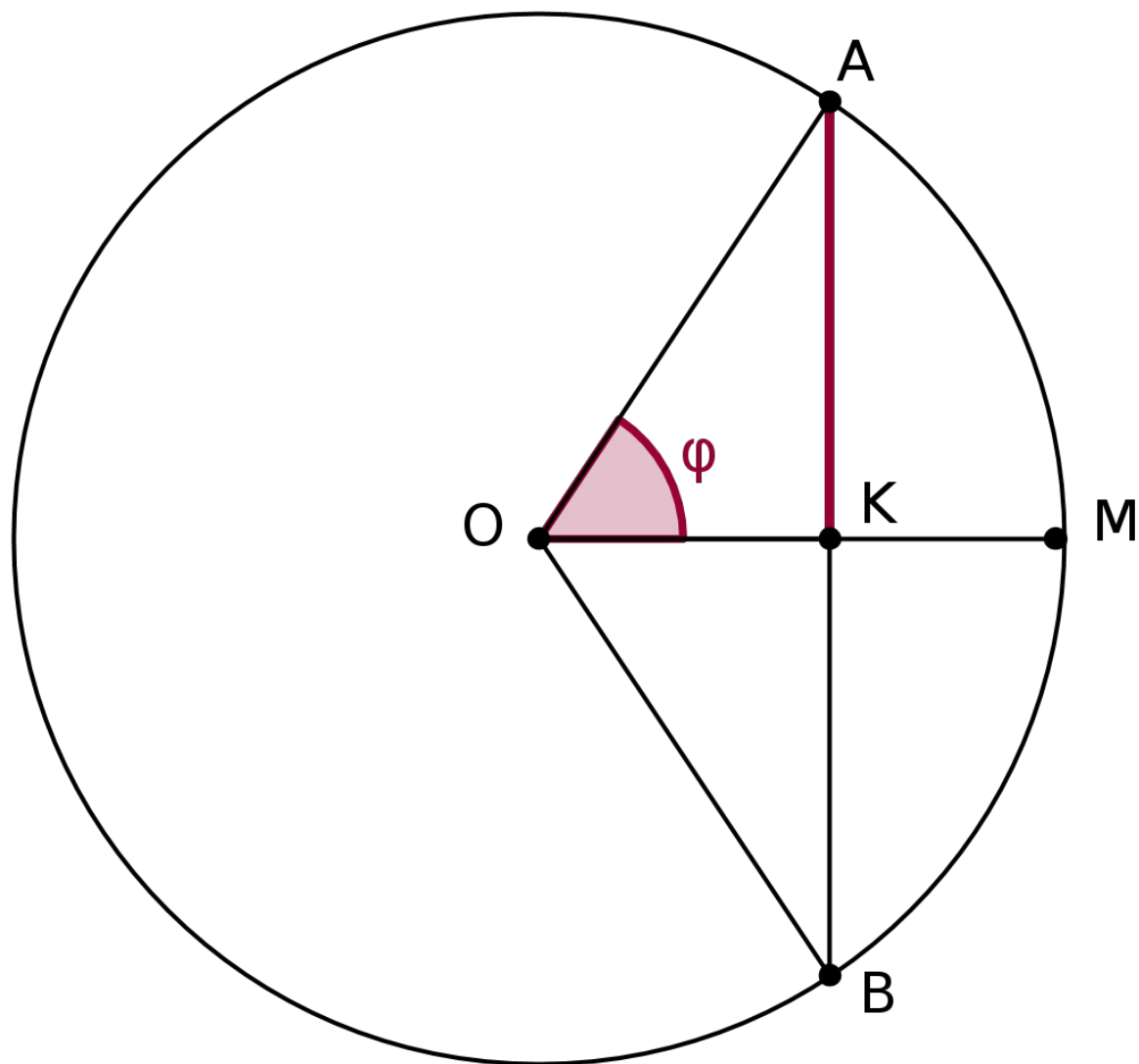
Άγνωστος Ινδός Μαθηματικός τον 5 αιώνα μ.Χ.
γράφει βιβλίο **Επίπεδης και Σφαιρικής
Τριγωνομετρίας** και χρησιμοποιεί για πρώτη
φορά στην Ιστορία την έννοια της **ημιχορδής**
(**jya-ardha**).

Το βιβλίο περιέχει πίνακα ημιχορδών σε κύκλο
ακτίνας 3438.



ΣΚΙΑ





Το πέραςμα της ορολογίας
της **ημιχορδής**
από τα Σανσκριτικά στα Λατινικά

- **Jya-ardha** (= χορδή-μισή) [Σανσκριτικά]
Jya (ή jīva) (συντόμευση σε χορδή)
- **Jiba** (φωνητική απόδοση στα Αραβικά)
Jb (γραπτή απόδοση)
jayb (= κοιλότητα, κόλπος, πτυχή, άνοιγμα ρούχου)
- **Sinus** [Λατινικά]

Το πέρασμα της ορολογίας
της **ημιχορδής**
από τα Αραβικά στα Ελληνικά

- Ευθεία ορθή
- Περσίκιον
- Τραχηλαία-(συνεφαπτομένη:σκίασμα-δδιλ μουσταμάλ) [Χιονιάδης ~1300]
- Κόλπωμα [καρδινάλιος Βησσαρίων-μαθητής του Πλήθωνα Γεμιστού ~1450]
- Σίνος

Γιάννενα
αρχές δεκάτου ογδόου αιώνα

Πρώτη χρήση της λέξης **ημίτονο**

ημίτονο

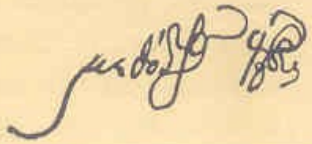
Ημι-χορδή
Ίππαρχος

Υποτείνουσες ευθείες
Πτολεμαίος

- **ΣΥΝΟΨΙΣ ΑΚΡΙΒΕΣΤΑΤΗ ΤΩΝ ΕΝ ΤΗ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΓΡΑΦΙΑ ΧΡΗΣΙΜΟΤΕΡΩΝ**
(Χειρόγραφο 1732)
- **ΟΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ** (1749)

ΜΕΘΟΔΙΟΣ ΑΝΘΡΑΚΙΤΗΣ

ΜΕΘΟΔΙΟΣ ΑΝΘΡΑΚΙΤΗΣ



Δάσκαλος του Γένους

1660 – 1736

Γεννήθηκε στην Καμινιά (σήμερα: Ανθρακίτης)

Σπούδασε στα Γιάννενα και στη Βενετία

Δίδαξε στην Καστοριά, στη Σιάτιστα και στα Γιάννενα.

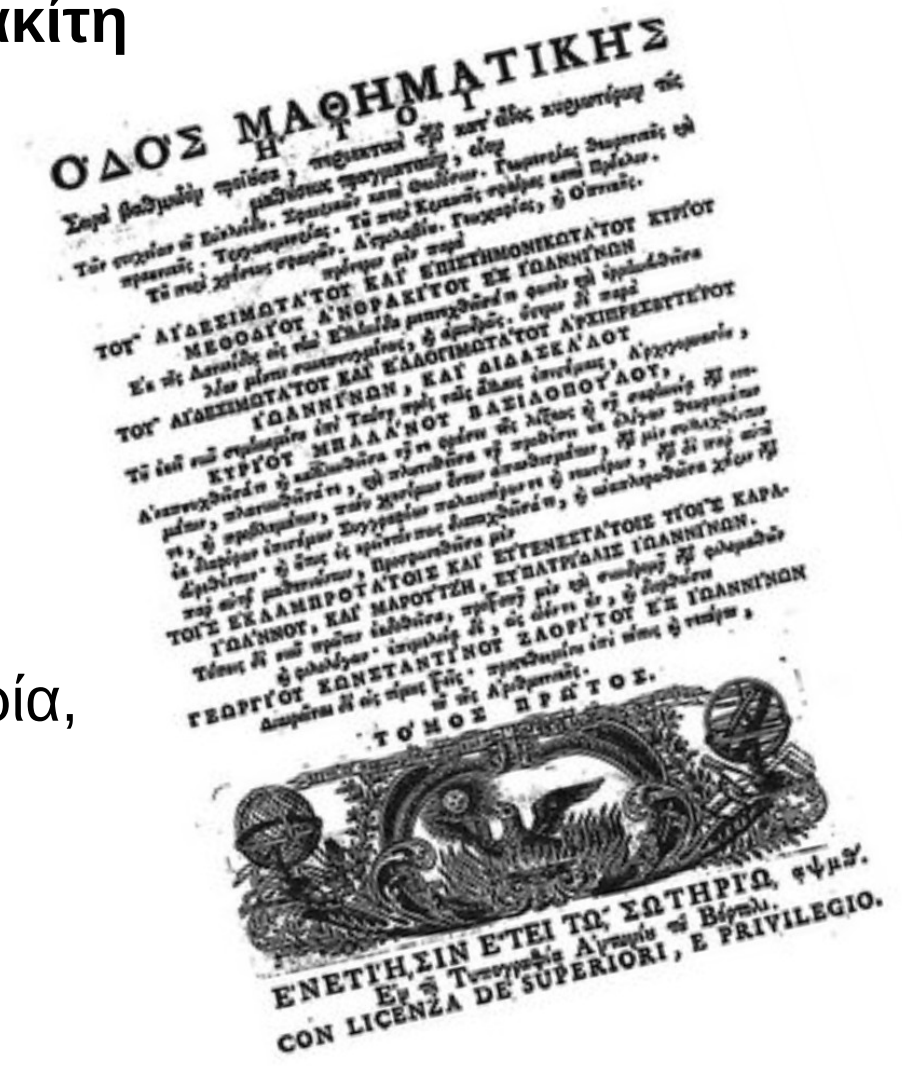
ΟΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ

Τρίτομο έργο του Μεθόδιου Ανθρακίτη

- εκδόθηκε το 1749 στη Βενετία

Περιεχόμενα:

- Ευκλείδεια Γεωμετρία,
- Θεωρία Αριθμών,
- Ιστορία των Μαθηματικών,
- Στερεομετρία,
- Επίπεδη και Σφαιρική τριγωνομετρία,
- Λογάριθμοι,
- Γεωγραφία,
- Οπτική,
- Αστρονομία
- χρήση Γεωμετρικών και Αστρονομικών οργάνων.



Καθιέρωση του όρου ΗΜΙΤΩΝΟ

- Νικηφόρος Θεοτόκης (1731 - 1800)
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΦΥΣΙΚΗΣ, 1766, Λειψία (Leipzig)
- Ευγένιος Βούλγαρης (1716 - 1806)
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑΙ ΑΙ ΑΡΧΟΕΙΔΕΣΤΑΤΟΙ
Λειψία, 1767

ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ