

*Μεγάλες στιγμές της Ιστορίας των Μαθηματικών στην αρχαιότητα**

*Παναγιώτης Χρ. Τσαμάτος
Καθηγητής Μαθηματικής Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων*

Η σύλληψη της έννοιας του αριθμού, ως μέτρου του μεγέθους ή της ποσότητας αντικειμένων του περιβάλλοντός του, ήταν για τον πρωτόγονο άνθρωπο, αναμφίβολα, η πρώτη σημαντική μαθηματική του κατάκτηση. Με το πέρασμα των αιώνων, και μετά την 3^η χιλιετία, τα Μαθηματικά, ως εμπειρική γνώση αρχικά και ως επιστήμη αργότερα, διαδραματίζουν έναν πολύ συναρπαστικό ρόλο στην ιστορία της ανθρώπινης διάνοησης. Η αφετηρία και τα πρώτα βήματα των Μαθηματικών, ως επιστήμης, τοποθετούνται περίπου, στο χρονικό διάστημα από το 600 π.Χ., μέχρι το 300 π.Χ. και αποτελούν μια πολύ σημαντική συνιστώσα του αρχαιοελληνικού, πλέον, πολιτισμού.

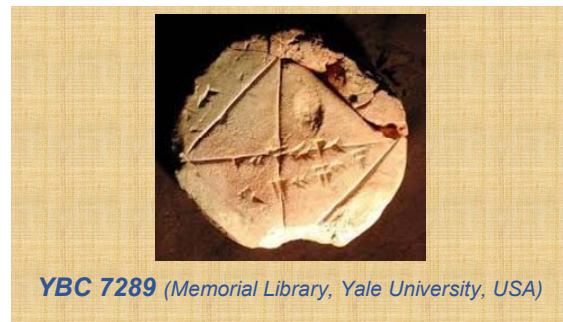
Τα χρονικά αυτά ορόσημα τίθενται, γιατί κοντά στο 600 π.Χ. τοποθετείται ιστορικά η γέννηση της φιλοσοφικής σκέψης και οι πρώτες μαθηματικές αποδείξεις στη Σχολή της Μιλήτου, ενώ, γύρω στο 300 π.Χ., παραδίδεται στην επιστημονική κοινότητα της εποχής, ένα από τα πιο σημαντικά βιβλία που κυκλοφόρησαν ποτέ στον κόσμο. Τα «**Στοιχεία**» του Ευκλείδη. Κανένα άλλο βιβλίο, εκτός από τη Βίβλο, δεν γνώρισε ίσως τόσες εκδόσεις, δεν μελετήθηκε τόσο πολύ και από τόσους πολλούς.

Μια καλή αφετηρία για την αφήγηση αυτής της ενδιαφέρουσας ιστορίας, θα μπορούσε να είναι η αρχή της 2^{ης} χιλιετίας π.Χ. Από τότε χρονολογούνται κάποια πολύ σημαντικά γραπτά μνημεία, που αποκάλυψε η αρχαιολογική σκαπάνη στην Μεσοποταμία. Από τις χιλιάδες πήλινες πλάκες, με ανάγλυφη σφηνοειδή γραφή, που ήρθαν στο φως, πεντακόσιες, περίπου, βρέθηκαν να έχουν μαθηματικό περιεχόμενο, κατά το πλείστον αριθμητικούς υπολογισμούς. Η πιο διάσημη και πιο πολυφωτογραφημένη από αυτές, είναι η περίφημη πλάκα **Plimpton 322**, που φυλάσσεται στο Πανεπιστήμιο **Columbia** των Η.Π.Α. Το περιεχόμενο της πλάκας αυτής είναι πυθαγόρειες τριάδες αριθμών.

* Διάλεξη, που δόθηκε την 16^η-3-2017, στη «Λέσχη Μαθηματικών» του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Κορμός της διάλεξης αυτής ήταν το περιεχόμενο της ομιλίας με τίτλο: «*Από τις βαβυλωνιακές πλάκες και τους παπύρους της Αιγύπτου στα "Στοιχεία του Ευκλείδη"*»- Η πορεία από την εμπειρική γνώση στην μαθηματική απόδειξη», που εκφωνήθηκε την 30^η-1-2017, στην Αίθουσα Τελετών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων "Γεώργιος Μυλωνάς", για την "Ημέρα των Ελληνικών Γραμμάτων".



Δηλαδή, τριάδες ακεραίων αριθμών που ικανοποιούν το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Ένα άλλο σημαντικό εύρημα της ίδιας περιόδου είναι η πήλινη πλάκα **YBC 7289**, από τη Μεσοποταμία, επίσης, που βρίσκεται στο Πανεπιστήμιο **Yale** των Η.Π.Α. Το εκπληκτικό είναι ότι το περιεχόμενο και της πλάκας αυτής, είναι σχετικό με το Πυθαγόρειο Θεώρημα.



Μέχρι πού, λοιπόν, έφταναν οι μαθηματικές γνώσεις των αρχαίων Βαβυλωνίων; Γνώριζαν το Πυθαγόρειο θεώρημα και σε ποιο βαθμό;

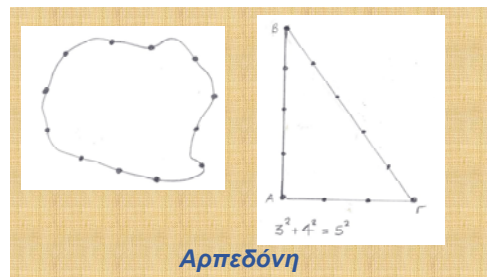
Από την άλλη πλευρά, σύμφωνα με τον Ηρόδοτο, τον Ήρωνα τον Αλεξανδρέα, τον Διόδωρο τον Σικελιώτη και άλλους αρχαίους συγγραφείς, οι ρίζες της γεωμετρίας πρέπει να αναζητηθούν, κυρίως, στην Αίγυπτο. Η ανάπτυξη της γεωμετρίας προέκυψε εκεί από μια άμεση βιοτική ανάγκη. Μετά από κάθε πλημμύρα του Νείλου, οι αγροτικές εκτάσεις έπρεπε να αναδιανεμόνται, για να αποδίδονται με δικαιοσύνη και πάλι στους καλλιεργητές. Για το σκοπό αυτό οι Αιγύπτιοι είχαν συστήσει ένα είδος τοπογραφικής υπηρεσίας, το σώμα των «**αρπεδοναπτών**».



Οι αρπεδονάπτες ήταν μετρητές της γης, από όπου και ο όρος "γεωμετρία". Σε πολλά ταφικά και άλλα αρχαία αιγυπτιακά μνημεία υπάρχουν σχετικές παραστάσεις συνεργείων αρπεδοναπτών «επί το έργον».



Αρπεδονάπτης είναι αυτός που κρατάει την **αρπεδόνη**, ένα από τα αρχαιότερα γεωμετρικά όργανα. Η αρπεδόνη ήταν ένα σχοινί δίχως άκρα, διαιρεμένο με κόμβους σε δώδεκα ίσα μέρη.



Τεντωμένο και κρατημένο σταθερά στον 1^ο, 4^ο και 8^ο κόμβο, σχημάτιζε ένα τρίγωνο με πλευρές 3, 4 και 5, τρίγωνο, το οποίο, λόγω των μηκών των πλευρών του, είναι ορθογώνιο. Με τον τρόπο αυτό δημιουργούσαν χωράφια με ορθές γωνίες, δηλαδή ορθογώνια παραλληλόγραμμα, εύκολα στον υπολογισμό του εμβαδού τους. Η πανάρχαια αυτή μέθοδος χάραξης ορθών γωνιών στο έδαφος, μένει μέχρι σήμερα ζωντανή. Οι σημερινοί τεχνίτες την ονομάζουν «**γώνιασμα**» και η αρπεδόνη έχει αντικατασταθεί πια από την μετροταινία.

Παρόμοια προβλήματα αναδασμών γης αντιμετώπιζαν λόγω των πλημμυρών των ποταμών Τίγρη και Ευφράτη στην Αρχαία Μεσοποταμία οι κάτοικοι της περιοχής αυτής, οι Σουμέριοι παλαιότερα και οι Βαβυλώνιοι, από την 2^η χιλιετία και μετά. Οι πήλινες πλάκες με τη σφηνοειδή γραφή πιστοποιούν, και εκεί, μια σημαντική ανάπτυξη της γεωμετρίας και της αριθμητικής. Είναι βέβαιο ότι οι δύο αυτοί πολιτισμοί είχαν μεγάλη αλληλεπίδραση. Είναι, επίσης, βέβαιο ότι τα μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων ήταν εκείνα, που περισσότερο από τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων, επέδρασαν στην ανάπτυξη της

γεωμετρίας και γενικότερα των μαθηματικών, στον ελλαδικό χώρο. Ο λόγος ήταν η ευκολία επικοινωνίας των ελληνικών νησιών και παραλίων με την Αίγυπτο, μέσω των θαλάσσιων δρόμων της Μεσογείου.

Αρχαίοι Έλληνες και Λατίνοι συγγραφείς διέσωσαν πολλές πληροφορίες για τα μαθηματικά της αρχαίας Αιγύπτου. Όμως, ο μεγάλος όγκος των πληροφοριών για τα μαθηματικά των Αιγυπτίων προέρχεται από το περιεχόμενο των παπύρων και ιδιαίτερα, του *παπύρου του Ahmes*, που βρίσκεται σήμερα στο Βρετανικό μουσείο.



Ο Ahmes, συγγραφέας του παπύρου αυτού, υπολογίζεται ότι τον συνέγραψε περί το 1700 π. Χ. Άλλοι πάπυροι, μικρότερης έκτασης και με επίσης μαθηματικό περιεχόμενο είναι ο *πάπυρος τη Μόσχας*, και ο *πάπυρος του Βερολίνου*, μεταγενέστεροι του παπύρου του Ahmes.

Από το περιεχόμενο των παπύρων αυτών, αναδεικνύεται μια αξιοθαύμαστη ανάπτυξη και γνώση των μαθηματικών, ιδιαίτερα της γεωμετρίας. Μια γνώση όμως καθαρά εμπειρική, εστιασμένη αποκλειστικά, στην εξυπηρέτηση κατασκευαστικών αναγκών, αναγκών της τότε τεχνολογίας, καθώς και εμπορικών ή άλλων συναλλαγών.

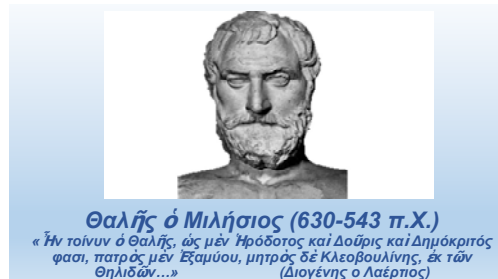
Αντίστοιχα είναι τα συμπεράσματα από την μελέτη των πήλινων πλακών της Μεσοποταμίας. Ειδικότερα, και σχετικά με το Πυθαγόρειο θεώρημα, είναι βέβαιο ότι ήταν γνωστή στους λαούς αυτούς η μετρική σχέση των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου. Δεν υπάρχει, όμως, καμιά απόδειξη ή ιστορική μαρτυρία για το ότι γνώριζαν και την απόδειξή του. Οι μαθηματικές γνώσεις των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων έγιναν με τον καιρό κτήμα των κατοίκων των παραλίων και των νησιών του Αιγαίου, οι οποίοι με τη σειρά τους ανέπτυξαν και αποθησαύρισαν μαθηματική γνώση ικανή για τα δικά τους αρχιτεκτονικά και τεχνολογικά θαύματα. Ένα τέτοιο, μικρό σε μέγεθος, αλλά θαυμαστό τεχνολογικό επίτευγμα, είναι το «*Ευπαλίνειο όρυγμα*» της Σάμου. Το όρυγμα αυτό κατασκευάστηκε το 530 π.Χ., σε μια εποχή που η εμπειρική μαθηματική γνώση είχε φτάσει σε υψηλά επίπεδα

εφαρμογών και στον ελλαδικό χώρο.



Όπως αναφέρει ο Ηρόδοτος, το ὄρυγμα κατασκευάστηκε από δύο συνεργεία, που δούλευαν ταυτόχρονα, ώστε να συναντηθούν κάπου στο μέσον της διαδρομής, πράγμα που επιτεύχθηκε με ελάχιστη απόκλιση.

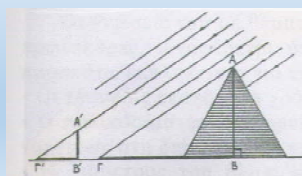
Ο Ευπαλίνος για την κατασκευή του έργου αυτού αντιμετώπισε με επιτυχία σύνθετα μαθηματικά προβλήματα, σε μια εποχή που τα εμπειρικά μαθηματικά είχαν φτάσει στο απόγειο της ιστορικής τους διαδρομής. Ήταν τα χρόνια εκείνα, που στην απέναντι ακτή της Ιωνίας ο **Θαλής ο Μιλήσιος** είχε μόλις θέσει τα θεμέλια της νέας εποχής των μαθηματικών.



Ο Θαλής ο Μιλήσιος έζησε στη Μίλητο το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του. Στην Αίγυπτο, όπου ταξίδεψε, ήρθε σε επαφή με τα μαθηματικά των Αιγυπτίων και κατάφερε να υπολογίσει το ύψος των πυραμίδων, από το μήκος της σκιάς τους, χρησιμοποιώντας δικά του συμπεράσματα, από τη θεωρία των ομοίων τριγώνων. Το επίτευγμα του Θαλή προξένησε βαθύτατες εντυπώσεις και μεγάλο θαυμασμό στους συγχρόνους, αλλά και σε μεταγενέστερους, όπως αναφέρουν ο Πλούταρχος και ο Διογένης ο Λαέρτιος.

«...τὴν βακτηρίαν στήσας ἐπὶ τῷ πέρατι τῆς σκιάς ἦν ἡ πυραμὶς ἐποίηι, γενομένων τῇ ἐπαφῇ τῆς ἀκτίνος δυεῖν τριγώνων, ἔδειξας ὅν ἡ σκιά πρὸς τὴν σκίαν λόγον εἶχε τὴν πυραμίδα πρὸς τὴν βακτηρίαν ἔχουσαν.» (Πλούταρχος)

«...καὶ ἐκμετρήσαί φησιν αὐτὸν τὰς πυραμίδας ἐκ τῆς σκιάς, παρατηρήσαντα ὅτε ἡμῖν ἰσομεγέθης ἐστίν.» (Διογένης Λαέρτιος)



Σχετική με την επίσκεψη του Θαλή στην Αίγυπτο είναι μια επιστολή του προς τον φίλο του, φιλόσοφο Φερεκύδη, που διασώζει ο Διογένης ο Λαέρτιος.

Θαλής Φερεκύδει	Ο Θαλής προς τον Φερεκύδη
<p>... καί ἦν κελεύης, παρὰ σέ ἀφίζομαι ἐς Σῦρον. Ἦ γάρ ἄν φρενέρες εἶημεν ἐγώ τε καὶ Σόλων ὁ Ἀθηναῖος, εἰ πλώσαντες μὲν ἐς Κρήτην κατὰ τὴν τῶν κείθι ἱστορίην, πλώσαντες δὲ ἐς Αἴγυπτον ὀμιλήσοντες τοῖς ἐκείνη ὄσοι ἱερέες τε καὶ ἀστρολόγοι, παρὰ σέ δὲ μὴ πλώσαιμεν. Ἦξει γάρ καὶ ὁ Σόλων, ἦν ἐπιτρέπης. (Διογένης ο Λαέρτιος)</p>	<p>... καὶ ἀν παραγγείλεις θάρθω στη Σῦρο. Γιατί δὲν θα ἤμασταν καλά στα μυαλό μας ἀν δὲν σε ἐπισκεπτόμασταν ἐγώ καὶ ὁ Σόλων ὁ Ἀθηναῖος, τὴ στιγμή που πλεύσαμε στὴν Κρήτη γιὰ νὰ μάθουμε τὰ τῆς ἱστορίας τῆς καὶ πλεύσαμε καὶ στὴν Αἴγυπτο γιὰ νὰ συνομιλήσουμε με τοὺς ἐκεῖ ἱερεῖς καὶ ἀστρονόμους. Γιατί θάρθει καὶ ὁ Σόλων ἀν το ἐπιτρέπεις.</p>

Από την επιστολή αυτή φαίνεται πόσο κοντά έφερναν οι δρόμοι της Μεσογείου τους ανθρώπους του πνεύματος, και όχι μόνο, από την Ιωνία, τη Σύρο, την Αθήνα, την Κρήτη και την Αίγυπτο.

Ο Θαλής είναι ο πρώτος άνθρωπος που αισθάνθηκε την ανάγκη **να αποδείξει** μαθηματικές αλήθειες, μέχρι τότε, εμπειρικά γνωστές. Αξίζει, στο σημείο αυτό, να δούμε ένα μικρό τμήμα από τον πρόλογο του βιβλίου «**Κριτική του ορθού Λόγου**» του **Kant**.

"Τα Μαθηματικά, ως επιστήμη, βρήκαν τον ασφαλή δρόμο τους στον αξιοθαύμαστο λαό των Ελλήνων... Πιστεύω ότι για αρκετό καιρό τα Μαθηματικά έμειναν στάσιμα (ιδίως στον λαό των Αιγυπτίων), μέχρις ότου έγινε μια επανάσταση στον τρόπο του σκέπτεσθαι. Την επανάσταση αυτή πρέπει να την αποδώσουμε στην ευτυχή έμπνευση του ανθρώπου που έθεσε τα θεμέλια της επιστήμης σ' όλους τους αιώνες. Ο Διογένης ο Λαέρτιος υποδεικνύει ότι εκείνος που πέτυχε αυτό θα πρέπει να μείνει αλησμόνητος. Είναι ο πρώτος που είχε την έμπνευση να αποδείξει την ισότητα των παρά την βάση γωνιών ενός ισοσκελούς τριγώνου (είτε Θαλής ονομαζόταν είτε αλλιώς)."
Immanuel Kant, Kritik der reinen Vernunft (Κριτική του ορθού Λόγου)

Η τόσο μεταγενέστερη, ώριμη και καίρια επισήμανση του μεγάλου Γερμανού φιλοσόφου, καταδεικνύει το μέγεθος της ιστορικής στιγμής για την πορεία των μαθηματικών και της φιλοσοφίας.

Στον Θαλή αποδίδονται οι αποδείξεις γεωμετρικών προτάσεων όπως, ότι η διάμετρος διχοτομεί τον κύκλο, οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες, οι παρά την βάση γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες, κάθε γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή, καθώς και θεωρήματα στα όμοια τρίγωνα.

(Πρόκλου, Σχόλια στο 1^ο Βιβλίο του Ευκλείδη)

Τὸ μὲν οὖν διγομηθεῖσθαι τὸν κύκλον ὑπὸ τῆς διαιμέτρου πρώτον Θαλῆν ἐκείνον ἀποδείξει φασιν.

Τῷ μὲν οὖν Θαλῆι τῷ παλαιῷ πολλῶν τε ἄλλων εὐρέσεως ἕνεκα καὶ τοῦδε τοῦ θεωρήματος χάρις. Λέγεται γὰρ δὴ πρῶτος ἐκείνος ἐπιστήσι καὶ εἰπὼν, ὡς ἴσα παντὸς ἰσοσκελοῦς αἱ πρὸς τὰ ἢ βάσει γωνία ἴσαι εἰσὶν, ἀρχαιώτερον δὲ τὰς ἴσας ὁμοίας προσειρηκέναι.

Τοῦτο τοίνυν τὸ θεώρημα δείκνυσιν, ὅτι δύο εὐθεῖων ἀλλήλιας πμνουσῶν αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαί ἴσαι εἰσὶν, εὐρημένον μὲν, ὡς φησιν Εὐθύμοσ, ὑπὸ Θαλοῦ πρώτου.

Μετά τον Θαλή, οι σημαντικότεροι εκπρόσωποι της Σχολής της Μιλήτου είναι ο **Αναξίμανδρος** και ο **Αναξίμενης**. Ο Αναξίμανδρος εισηγήθηκε την πάρα πολύ τολμηρή άποψη για την εποχή του, ότι υπάρχουν ελκτικές δυνάμεις των άστρων προς τη γη. Επίσης, κατασκεύασε γνώμονες για την διάγνωση των αλλαγών της πορείας του ήλιου (ηλιοστάσια, ισημερίες).

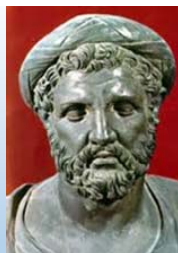
Ο Αναξίμενης, μεταξύ άλλων, προσπάθησε να εξηγήσει μετεωρολογικά και τεκτονικά φαινόμενα, όπως αναφέρει ο Αριστοτέλης.

«Αναξίμενης δέ φησί βρεχομένην τήν γῆν καί ξηραίνομένην ρήγνυσθαι καί ὑπὸ τούτων τῶν ἀπορρηγνυμένων κολωνῶν ἐμπιπτόντων σειεσθαι.»
(Αριστοτέλης)

(Ο Αναξίμενης είπε ότι όταν βρέχεται η γη και μετά επικρατεί ξηρασία, δημιουργούνται ρωγμές και, εξαιτίας αυτών των ρωγμών, αποσπώνται και πέφτουν μεγάλα γήινα κομμάτια, προκαλώντας σεισμούς.)

Από την μικρή αυτή αναφορά στους δύο αυτούς φυσικούς, περισσότερο, φιλοσόφους φαίνεται καθαρά η μεγάλη στροφή που πραγματοποιείται αυτή την εποχή στη σκέψη των ανθρώπων. Οι θεότητες, που καθόριζαν τις κινήσεις των ουρανίων σωμάτων, δίνουν τη θέση τους σε ελκτικές δυνάμεις και ο Εγκέλαδος απομυθοποιείται εντελώς.

Όμως, η μεγάλη μορφή για τα Μαθηματικά, μετά τον Θαλή και την Σχολή της Μιλήτου, είναι αναμφισβήτητα ο **Πυθαγόρας**.



Πυθαγόρας ο Σάμιος (580-490 π.Χ.)
«Πάντα κατ' ἀριθμόν γίνονται»

Υπάρχουν άφθονες πληροφορίες για τη ζωή και το έργο του Πυθαγόρα. Διασώθηκαν τρεις βιογραφίες του γραμμένες από τους Ιάμβλιχο, Πορφύριο και από τον Διογένη τον Λαέρτιο. Ο Πυθαγόρας μαθητής του Θαλή, ταξίδεψε στην Αίγυπτο, και από εκεί στη Βαβυλώνα από όπου, σε ηλικία 40 ετών, περίπου, επέστρεψε στην Σάμο. Μετά το θάνατο του δασκάλου του, φιλοσόφου Φερεκύδη από τη Σύρο, εγκαταστάθηκε στον Κρότωνα της Κάτω Ιταλίας, όπου ίδρυσε σχολή Μαθηματικών και Φιλοσοφίας.

Σε αντίθεση με το δάσκαλό του τον Θαλή, ο Πυθαγόρας ήταν μυστικιστής και έκανε ό,τι μπορούσε για να δημιουργήσει και να διατηρήσει μια αχλύ μύθου και μυστηρίου γύρω από το πρόσωπό του. Οι μαθητές της σχολής του χωρίζονταν σε δύο κατηγορίες, τους "ακουσματικούς" και τους "μαθηματικούς". Οι ακουσματικοί ήταν ένα είδος ακροατών, οι οποίοι δεν είχαν δικαίωμα ενεργού συμμετοχής στη διδασκαλία. Οι "μαθηματικοί", οι γνωστοί και ως **Πυθαγόρειοι**, ζούσαν κοινοβιακή ζωή, με αυστηρούς κανόνες κοντά στον Πυθαγόρα.

Κάθε μαθητής με την εισδοχή του στην τάξη των Πυθαγορείων, έδινε όρκο ότι δεν θα απεκάλυπτε τα μυστικά της γνώσης που θα αποκτούσε. Ο όρκος αυτός έλεγε τα εξής:

«Οὐ, μά τόν ἀμετέρας σοφίας εὐρόντα τετρακτύν, παγάν ἀνάου φύσεως ριζώματ' ἔχουσαν.» (Μα τον Πυθαγόρα που ανακάλυψε την τετρακτύ, που είναι το σύμβολο της σοφίας μας και πηγή της αέναης φύσης κι έχει τη δύναμη που έχουν τα ριζώματα [δεν θα μαρτυρήσω ποτέ τίποτε από όσα μαθαίνω].)

Με τον όρο **τετρακτύς** οι Πυθαγόρειοι εννοούσαν την τετράδα των αριθμών 1, 2, 3, 4, μαζί με το άθροισμά τους το 10. Η τετρακτύς ήταν γι' αυτούς ιερό σύμβολο αφού το 10 συμβόλιζε τη βάση του συστήματος αρίθμησης και οι αριθμοί 1, 2, 3, 4 τα τέσσερα σημεία του ορίζοντα και τις τέσσερις εποχές του έτους.

Η μυστικότητα για τα δρώμενα της σχολής κράτησε περίπου πενήντα χρόνια. Στο διάστημα αυτό οι Πυθαγόρειοι απέκτησαν σημαντική πολιτική και κοινωνική επιρροή. Αυτό οδήγησε στη βίαιη διάλυση της σχολής το 450 π. Χ., από την αντίπαλη πολιτική παράταξη, τους Συβαρίτες, που συνοδεύτηκε από σφαγή των μελών της. Διέφυγαν μόνο δύο, ο **Φιλόλαος** και ο **Λύσις**. Ο Φιλόλαος κατέγραψε πολλές από τις θεωρίες της Πυθαγόρειας κοινότητας. Από τα γραπτά του Φιλόλαου γνώρισε ο Πλάτων τη φιλοσοφία των Πυθαγορείων, την οποία και σχολίασε εκτενέστατα στο έργο του.

Οι Πυθαγόρειοι ασχολήθηκαν ιδιαίτερα με τη μελέτη των αριθμών. Πέρα από την

καθαρά μαθηματική σημασία τους, οι αριθμοί για τους Πυθαγόρειους είχαν και μια άλλη μυστικιστική διάσταση. Πίστευαν ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι βασικό συστατικό στοιχείο των όντων και οι σχέσεις τους υποκρύπτουν φυσικούς νόμους και διαδικασίες. Μάλιστα οι σχέσεις αυτές επεκτείνονταν και στις σχέσεις των ρητών αριθμών. Ο αριθμός 4 συμβόλιζε τη δικαιοσύνη γιατί είναι το πρώτο τέλει τετράγωνο και ο αριθμός 5 το γάμο γιατί ήταν κατ' αυτούς ένωση του πρώτου θηλυκού (άρτιου) και του πρώτου αρσενικού (περίπου) αριθμού, $2+3=5$. (Τον αριθμό 1 δεν τον θεωρούσαν περιττό, αλλά τον γεννήτορα όλων των αριθμών).

Ο Πυθαγόρας είναι ο πρώτος που επινόησε τη μουσική κλίμακα και αντιστοίχησε τους μουσικούς φθόγγους στους ρητούς αριθμούς 1, $4/3$, $3/2$, 2.

Ο Πυθαγόρας διαίρουσε τα μαθηματικά σε τέσσερις ενότητες. Την Αριθμητική τη Γεωμετρία την Αστρονομία και τη Μουσική. Τις τέσσερις αυτές ενότητες τις αποκαλούσε με ένα όνομα **τετραόδιο**. Το τετραόδιο αποτέλεσε για πολλούς αιώνες αδιαίρετη ενότητα της εκπαίδευσης των νέων.

Έχουν γραφεί πολλά για τις δογματικές πεποιθήσεις των Πυθαγορείων τις σχετικές με τους αριθμούς. Όμως, πέρα από αυτά, οι Πυθαγόρειοι ασχολήθηκαν με σπουδαία μαθηματικά προβλήματα και έδωσαν εμβληματικά συμπεράσματα στην μαθηματική επιστήμη. Είναι βέβαιο ότι αυτοί έδωσαν πρώτοι την απόδειξη του πασίγνωστου **πυθαγορείου θεωρήματος**, που έκτοτε φέρει το όνομά τους.

Αλλά, το πιο σημαντικό, ίσως, μαθηματικό επίτευγμα των Πυθαγορείων είναι η ανακάλυψη των **αρρήτων ή ασύμμετρων αριθμών**. Θεωρώντας ένα τετράγωνο πλευράς, μήκους 1, βρίσκουμε, με το Πυθαγόρειο Θεώρημα, ότι η διαγώνιός του έχει μήκος αυτό που σήμερα εμείς λέμε $\sqrt{2}$. Η απόδειξη ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός, δηλαδή δεν μπορεί να παρασταθεί ως κλάσμα με όρους ακεραίους αριθμούς, αναστάτωσε την κοινότητα των Πυθαγορείων. Διότι, πως μπορείς να στηρίζεις μια ολόκληρη κοσμοθεωρία στους ακεραίους και τα κλάσματα ακεραίων, όταν αυτοί δεν αρκούν να μετρήσουν ένα τόσο κοινό και στοιχειώδες μέγεθος, όπως η διαγώνιος ενός τετραγώνου πλευράς 1; Αποφάσισαν, λοιπόν, να κρατήσουν μυστική την ανακάλυψή τους. Η παράδοση λέει, και αφθονούν οι παραδόσεις για τους Πυθαγορείους, πως εκείνος που διέρρευσε το μυστικό, πλήρωσε την απειθείά του με πνιγμό. Προσπάθειες υπολογισμού του μήκους της διαγωνίου τετραγώνου πλευράς μήκους 1, δηλαδή του $\sqrt{2}$, είχαν προηγηθεί και μάλιστα με σχετική επιτυχία. Στο σχήμα

σε κάποιον που θα ήθελε απλά να απαριθμήσει τα κορυφαία μαθηματικά συμπεράσματα της περιόδου εκείνης. Όμως, έστω και έτσι, φτάνοντας στον Ευκλείδη και το σύγγραμμά του, θα έπρεπε να δικαιολογήσει το μέγιστο επίτευγμα της αξιωματικής θεμελίωσης της Γεωμετρίας και τότε, αναγκαστικά, θα έπρεπε να γυρίσει πίσω και να αναλογιστεί το «πώς» και το «γιατί» πάνω στη διαμόρφωση της μαθηματικής σκέψης και στους όρους παραγωγής της. Αυτό ήταν έργο των προσωκρατικών φιλοσόφων, μιας πλειάδας και μαθηματικών και, βεβαίως, του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη. Ας αναφέρουμε κάποιους από αυτούς.

Αναξαγόρας ο Κλαζομένιος

Ο *Αναξαγόρας* γεννήθηκε στις Κλαζομενές της Ιωνίας (τα σημερινά Βουρλά της Σμύρνης) περί την εβδομηκοστή Ολυμπιάδα (500-497 π.Χ.) και πέθανε το 428 π.Χ. Φοίτησε στη σχολή της Μιλήτου, όταν ήταν διευθυντής σ' αυτήν ο Αναξιμένης. Γόνος πλούσιας οικογένειας, χάρισε τα περιουσιακά του στοιχεία στους συγγενείς και μετακόμισε στην Αθήνα, όπου είχε μαθητές μεταξύ άλλων τον Περικλή και τον Ευριπίδη. Διατύπωσε τη θεωρία ότι ο ήλιος είναι πυρακτωμένος λίθος. Η άποψη αυτή θεωρήθηκε προσβολή των θείων (αφού ο ήλιος εθεωρείτο θεότητα) από τους περί τον Θουκυδίδη πολιτικούς αντιπάλους του Περικλή. Ο Αναξαγόρας καταδικάστηκε σε ισόβια εξορία. Κατέφυγε στην πόλη Λάμψακο του Ελλησπόντου, όπου ίδρυσε σχολή και συνέχισε την επιστημονική του δραστηριότητα. Ο Αναξαγόρας ασχολήθηκε με ένα από τα τρία άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας, τον *τετραγωνισμό του κύκλου*. Ο Πλούταρχος γράφει σχετικά: **«*ἀλλ' Ἀναξαγόρας μὲν ἐν τῷ δεσμωτηρίῳ τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμόν ἔγραφε.*»**

Ο Αναξαγόρας διατύπωσε πολλά συμπεράσματα για αστρονομικά, φυσικά, χημικά και μετεωρολογικά θέματα. Το εντυπωσιακότερο ίσως συμπέρασμα του Αναξαγόρα είναι το ότι υπάρχουν και άλλα ηλιακά συστήματα παρόμοια με το δικό μας. Ο *Σιμπλίκιος* (7ος αιώνας μ.Χ.) γράφει σχετικά: **«*καὶ ὅτι μὲν ἑτέραν τινὰ διακόσμησιν παρὰ τὴν παρ' ἡμῖν αἰνίττεται, δηλοῖ το «ὥσπερ παρ' ἡμῖν» οὐχ' ἄπαξ μόνον εἰρημένον.*»** (Και το ότι υπαινίσσεται την ύπαρξη και άλλων ηλιακών συστημάτων εκτός από το δικό μας, το φανερώνει η φράση του "όπως και το δικό μας ηλιακό σύστημα", την οποία δεν είπε μόνο μια φορά.)

Ιπποκράτης ο Χίος

Ο *Ιπποκράτης ο Χίος* έζησε από το 460 μέχρι το 380 Π.Χ. και δίδαξε Γεωμετρία στην

Αθήνα. Έγραψε το πρώτο διδακτικό βιβλίο μαθηματικών με τίτλο «Στοιχεία». Ασχολήθηκε με το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου και με το πρόβλημα του τετραγωνισμού των μηνίσκων ενός κύκλου. Ο Ιπποκράτης συνεισέφερε, μεταξύ άλλων, και στον φορμαλισμό των γεωμετρικών προβλημάτων χρησιμοποιώντας γράμματα για την περιγραφή των γεωμετρικών σχημάτων. Ένα μεγάλο μέρος του περιεχομένου του έργου του Ιπποκράτη περιέχεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη.

Ζήνων ο Ελεάτης

Ο ***Ζήνων*** γεννήθηκε στην Ελέα της Κάτω Ιταλίας το 495π.Χ. Ο Ζήνων, αν και «λιγότερο μαθηματικός» από τους προηγούμενους, ασχολήθηκε συστηματικά με την έννοια του απείρου. Διατύπωσε διάφορα προβλήματα, που εμπλέκουν την έννοια του απείρου, τα οποία προκάλεσαν σφοδρές συζητήσεις μεταξύ των φιλοσόφων της αρχαιότητας. Με τα προβλήματα του Ζήωνα ασχολήθηκε εκτενώς ο Αριστοτέλης.

Δημόκριτος

Ο ***Δημόκριτος*** γεννήθηκε στα Άβδηρα περί το 470 π.Χ. Γόνος πολύ πλούσιας οικογένειας, ταξίδεψε στην Αίγυπτο, την Αιθιοπία, την Ινδία, την Αραβία, τη Βαβυλώνα και την κάτω Ιταλία. Υπήρξε μαθητής του Λευκίππου και, κατά την παράδοση, μαθήτευσε και στη σχολή του Πυθαγόρα. Γονιμότατος νους, ασχολήθηκε με όλα τα πεδία των επιστημών και της φιλοσοφίας. Έγραψε πλήθος συγγραμμάτων από τα οποία σώζονται τριακόσια μόνο μικρά αποσπάσματα. Είναι γνωστός ως ο πατέρας της ατομικής θεωρίας. Ασχολήθηκε όμως και με καθαρά μαθηματικά θέματα, όπως φαίνεται από τους τίτλους των συγγραμμάτων του.

α) *Περί διαφοράς γωνιών*

β) *Θεωρία αριθμών*

γ) *Προβολική Γεωμετρία.*

Η συνεισφορά του Δημοκρίτου στην επιστήμη της εποχής είναι σημαντικότερη, αφού αυτός με το δάσκαλό του τον Λεύκιππο θεωρούνται οι ιδρυτές της ατομικής θεωρίας.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρει κανείς ότι την περίοδο πριν από τον Πλάτωνα, έλαμψαν στο πνευματικό στερέωμα σημαντικές μορφές της φιλοσοφίας, όπως οι:

Ξενοφάνης, Παρμενίδης, Ηράκλειτος, Εμπεδοκλής, Λεύκιππος, Αλκμαίων και Διογένης ο Απολλωνιάτης. Όλοι αυτοί ανήκουν στους λεγόμενους «**προσωκρατικούς φιλοσόφους**».

Ο όρος «**προσωκρατικός φιλόσοφος**» χρησιμοποιείται με δύο σημασίες:

- 1) Με τη χρονική σημασία, για να δηλώσει τους διανοητές που ζήσανε πριν από τον Σωκράτη.
- 2) Για να δηλώσει εκείνους τους διανοητές που δεν συνδέονταν με τη σχολή του Σωκράτη και του Πλάτωνα, έστω κι αν μερικοί απ' αυτούς ήταν σύγχρονοι ή και λίγο μεταγενέστεροι του Σωκράτη. (Εισηγητής της σημασίας αυτής είναι ο *H. Diels* στο βιβλίο του «*Die Fragmente der Vorsokratiker*» (*Τα αποσπάσματα των Προσωκρατικών*)).

Η περίοδος που αναφερόμαστε έχει ως κέντρο της τον 5ο π.Χ. αιώνα, έναν αιώνα που χαρακτηρίζεται από την ανάδειξη των Αθηνών ως ηγέτιδας πολιτικοστρατιωτικής δύναμης στον ελληνικό χώρο και, ταυτόχρονα, ως πολιτιστικού κέντρου στην ευρύτερη περιοχή της Μεσογείου. Δημιουργήθηκαν, έτσι, οι συνθήκες για την συγκέντρωση όλου σχεδόν του επιστημονικού δυναμικού τού τότε πολιτισμένου κόσμου στην Αθήνα, ώστε να λάβει σάρκα και οστά ο "*χρυσός αιώνας του Περικλέους*" και η πολιτιστική ακμή που ακολούθησε με τον Σωκράτη, τον Πλάτωνα και την Ακαδημία του, από την οποία θα παρελάσουν οι επιφανέστεροι φιλόσοφοι και μαθηματικοί, με πρώτους και καλύτερους τον Αριστοτέλη και τον Εύδοξο τον Κνίδιο.

Μετά το θάνατο του Σωκράτη, ο **Πλάτων**



ταξίδεψε στην Αίγυπτο και την Κάτω Ιταλία. Στα μέρη αυτά ήρθε σε επαφή με ό,τι πιο εκλεκτό διέθετε η μαθηματική επιστήμη της εποχής. Συνάντησε, μεταξύ άλλων, τον **Θεόδωρο τον Κυρηναίο** και τον **Αρχύτα τον Ταραντίνο** και είχε την ευκαιρία να σπουδάσει τα μαθηματικά και τη φιλοσοφία των πυθαγορείων από τα έργα του πυθαγόρειου Φιλολάου, τα οποία και σχολίασε στο έργο του. Επιστρέφοντας το 380 π.Χ. στην Αθήνα, ίδρυσε την περίφημη **Ακαδημία**, όπου τα μαθηματικά ήταν βασικό μάθημα. Τα περίφημα άλυτα

προβλήματα της αρχαιότητας ήταν κυρίως προβλήματα στη σχολή. Η ζύμωση των ιδεών γύρω από τη λύση αυτών των προβλημάτων, έφερε συχνά στο προσκήνιο και το θέμα των ασύμμετρων ή άρρητων αριθμών. Αξίζει στο σημείο αυτό να μνημονεύσουμε το σχετικό χωρίο από τον "Θεαίτητο" του Πλάτωνα, καθώς και ένα χωρίο από τους «Νόμους» του Πλάτωνα. Το πρώτο χωρίο δίνει τη σημαντική πληροφορία ότι ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος συνέχισε το έργο των Πυθαγορείων ανακαλύπτοντας καινούργιους άρρητους αριθμούς.

Από τον «Θεαίτητο» του Πλάτωνα

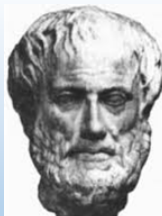
«...περί δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὄδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέντε καὶ πεντέποδος [ἀποφαίνων] ὅτι μήκει οὐ συμμετροὶ τῆ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαίδεκάποδος.»

«...σχετικά με την τετραγωνική ρίζα του τρία και του πέντε, ο Θεόδωρος έγραψε σε μένα, ότι απέδειξε πως δεν είναι σύμμετροι αριθμοί και το ίδιο για ένα-έναν τους αριθμούς μέχρι και δεκαεπτά.»

Το δεύτερο είναι ένας μικρός ύμνος στην παιδευτική αξία των μαθηματικών. Επίκαιρος όσο ποτέ στη εποχή μας, που η διεκδίκηση ρόλων στην μαθηματική παιδεία έχει αποκτήσει πολλούς μνηστήρες, συχνά «αγεωμέτρητους».

«...πρὸς τε γὰρ οἰκονομίαν καὶ πρὸς πολιτείαν καὶ πρὸς τὰς τέχνας πάσας ἐν οὐδὲν οὕτω δύναμιν ἔχει παιδεῖον μάθημα μεγάλης, ὡς ἡ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς διατριβή· τὸ δὲ μέγιστον, ὅτι τὸν νυστάζοντα καὶ ἀμαθῆ φύσει ἐγείρει καὶ εὐμαθῆ καὶ μνήμονα καὶ ἀγχνίουν ἀπεργάζεται...»

Ο **Αριστοτέλης**, η επόμενη μετά τον Πλάτωνα, εμβληματική μορφή της φιλοσοφίας, ήταν μαθητής του Πλάτωνα και δάσκαλος του Μεγάλου Αλεξάνδρου.



Αριστοτέλης (384 - 322 π.Χ.)

«πάντες ἄνθρωποι τοῦ εἶδέναι ὀρέγονται»

Το εύρος των επιστημονικών ενδιαφερόντων του Αριστοτέλη ήταν τεράστιο και πολυσχιδές. Αν και η συνεισφορά του, ειδικά στα μαθηματικά, δεν ήταν εξειδικευμένη, η συνεισφορά του στη θετική σκέψη (και κατά συνέπεια σ' όλες τις Θετικές Επιστήμες) ήταν κολοσσιαία.

Η συμβολή του στα μαθηματικά ήταν δομική, σε θέματα αρχών, όπως η *λογική* και η *θεωρία των αποφάνσεων*. Κατά τον Αριστοτέλη στα μαθηματικά ένα συμπεράσμα-απόφαση πρέπει να είναι αποτέλεσμα μιας αποδεικτικής διαδικασίας η οποία στηρίζεται σε κάποια άλλα ήδη γνωστά συμπεράσματα-αποφάνσεις. Η διαδικασία αυτή εδράζεται σε κάποιες αποφάνσεις οι οποίες δεν αποδεικνύονται αλλά θεωρούνται *a-priori* αληθείς. Οι αποφάνσεις αυτές ονομάστηκαν από τον Αριστοτέλη *αιτήματα* ή *αξιώματα* και τα συμπεράσματα που προκύπτουν με απόδειξη, *θεωρήματα*. Δομικά στοιχεία για την κατασκευή των αξιωμάτων είναι οι *κοινές έννοιες* κατά την αριστοτελική ορολογία, οι οποίες γίνονται δεκτές διαισθητικά. Έτσι, ο Αριστοτέλης, με τον τρόπο αυτό, προτείνει μια ασφαλή διαδικασία παραγωγής της μαθηματικής, κυρίως, γνώσης την *αξιοματική θεμελίωση*.

Ο Ευκλείδης βρήκε, λοιπόν, πρόσφορο το έδαφος να ανασυνθέσει, με εργαλείο τις ιδέες του Αριστοτέλη, όλη τη μέχρι τότε γνωστή μαθηματική γνώση. Και το έκανε με απόλυτη επιτυχία στη συγγραφή των «Στοιχείων» του.

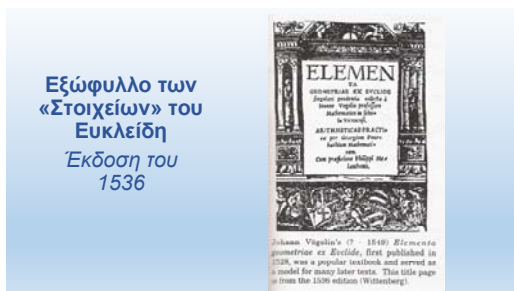
Ο τόπος και ο χρόνος γέννησης του *Ευκλείδη* δεν είναι ιστορικά εξακριβωμένοι.



Βέβαιο είναι ότι έζησε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου περί το 300 π.Χ., αφού ο Πρόκλος αναφέρει ότι ο Ευκλείδης ήταν σύγχρονος του βασιλιά Πτολεμαίου του Α΄. Προς τον Πτολεμαίο, μάλιστα, ο Ευκλείδης είχε απευθύνει ευθαρσώς την πολυσήμαντη φράση: "*Δεν υπάρχει βασιλική οδός προς την γεωμετρία*", απαντώντας στο ερώτημά του για το πως θα μπορούσε να μάθει, χωρίς πολύ κόπο, γεωμετρία.

Ο Πάππος, σχολιαστής του έργου του, αναφέρει ότι κύριο χαρακτηριστικό του ήταν η

πραότητα και ότι το έργο του χαρακτηρίζεται από την ακρίβεια και τον σεβασμό, με τα οποία μετέφερε σ' αυτό τα συμπεράσματα των προγενέστερων μαθηματικών, πλαισιώνοντάς το με το δικό του νέο υλικό. Παρέδωσε, έτσι, στις επόμενες γενεές ένα έργο που γαλούχησε χιλιάδες μαθηματικούς και άλλους επιστήμονες και, μέχρι τις ημέρες μας, συνεχίζει να εμπνέει και να είναι πηγή έρευνας.



Το μέγιστο αυτό σύγγραμμα διασώθηκε σε πολλές εκδόσεις αντιγραφών, αρκετές φορές αναρμοδίων. Αποψιλωμένο από τις όποιες ανακρίβειες και περιττές προσθήκες των αντιγραφών, κατέληξε τελικά να είναι, κατά τη γνώμη των ειδικών, όμοιο με το πρωτότυπο. Ένα σύγγραμμα δεκατριών τόμων, από τους οποίους οι πέντε διασώθηκαν πλήρεις και περιέχει, εκτός από τα προκαταρκτικά, 93 προβλήματα και 372 θεωρήματα. Αυτό είναι επιγραμματικά το περιεχόμενό του.

Περιεχόμενα των «Στοιχείων» του Ευκλείδη

- **Βιβλίο I:** Τα αξιώματα της γεωμετρίας, τα περί τριγώνων και το Πυθαγόρειο θεώρημα.
- **Βιβλίο II:** Αλγεβρικές ταυτότητες και στοιχεία τριγωνομετρίας σε γεωμετρική μορφή.
- **Βιβλίο III:** Περί του κύκλου.
- **Βιβλίο IV:** Εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα σε κύκλο.
- **Βιβλίο V:** Θεωρία των αναλογιών.
- **Βιβλίο VI:** Όμοια πολύγωνα.
- **Βιβλία VII, VIII, IX:** Θεωρία αριθμών. (Ο *ευκλείδειος αλγόριθμος* για την εύρεση του ΜΚΔ δύο αριθμών, η μέθοδος εύρεσης των *τέλειων αριθμών*, η απόδειξη ότι το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι απέραντο.)
- **Βιβλίο X:** Στοιχεία από τη θεωρία των ασύμμετρων αριθμών.
- **Βιβλία XI, XII, XIII:** Στερεομετρία.
- **Βιβλίο XIII:** Πολύεδρα.

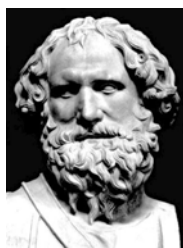
Εκτός από τα Στοιχεία, που εν πολλοίς είναι μια συνθετική εργασία, στον Ευκλείδη αποδίδονται και άλλα καθαρά ερευνητικά έργα από τα οποία διασώζονται ελάχιστα αποσπάσματα ή και μόνο οι τίτλοι. Μερικά από αυτά είναι τα «Δεδομένα», τα «Περί διαιρέσεων», τα «Πορίσματα», τα «Ψευδάρια», τα «Κωνικά», τα «Οπτικά» και τα «Κατοπτρικά».

Αν και το πρώτο μεγάλο και καθοριστικό βήμα στην γέννηση και πορεία της θεωρητικής μαθηματικής σκέψης ολοκληρώνεται με τη συγγραφή των Στοιχείων του

Ευκλείδη, επιβάλλεται, για λόγους ολοκληρωμένης παρουσίας της εξέλιξης των Μαθηματικών στην ελληνική αρχαιότητα, μια σύντομη αναφορά στους σημαντικότερους επιγόνους το Ευκλείδη μέχρι και τους ελληνοιστικούς χρόνους.

Αρχιμήδης

Ο *Αρχιμήδης* γεννήθηκε στις Συρακούσες το 287 Π.Χ. και είχε πιθανότατα συγγενικούς δεσμούς με την βασιλική οικογένεια των Συρακουσών.



Ταξίδεψε στην Αίγυπτο και συναντήθηκε με πολλούς και σημαντικούς επιστήμονες της εποχής του.

Οι επιδόσεις του Αρχιμήδη στα Μαθηματικά και τη Μηχανική τον έκαναν πολύτιμο αμυντικό σύμβουλο της πόλης των Συρακουσών. Οι πολεμικές μηχανές που επινόησε αποδείχτηκαν αποτελεσματικότερα εργαλεία στην άμυνα των Συρακουσών κατά την πολιορκία της πόλης από τους Ρωμαίους στη διάρκεια του Β' Καρχηδονιακού πολέμου.

Κατά την πτώση των Συρακουσών το 212 π. Χ. και την καταστροφή που επακολούθησε, ο Αρχιμήδης σκοτώθηκε από ένα Ρωμαίο στρατιώτη. Έμεινε ιστορική η, κατά την παράδοση, τελευταία φράση του Αρχιμήδη: «*Μή μου τούς κύκλους τάραττε*», ενδεικτική της αφοσίωσης του Αρχιμήδη στην επιστημονική έρευνα μέχρι την τελευταία του στιγμή.



Από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα του Αρχιμήδη θεωρείται η πολύ ακριβής προσέγγιση του αριθμού π , του γνωστού λόγου του μήκους της περιφέρειας ενός κύκλου προς το μήκος της διαμέτρου αυτού. Η προσέγγιση αυτή είναι $\pi = 3,1416$.

Τα έργα του Αρχιμήδη είναι: «Κύκλου μέτρησις», «Περί σφαιράς και κυλίνδρου», «Περί κωνοειδών και σφαιροειδών», «Περί ελίκων», «Περί επιπέδων ισορροπιών», «Περί ζυγών», «Η έφοδος». Του τελευταίου έργου, που είναι μεθοδολογικού χαρακτήρα, διασώθηκαν μόνο αποσπάσματα. Τα αποδιδόμενα στον Αρχιμήδη έργα είναι πολλά. Μεταξύ αυτών είναι τα «Περί κωνικών τομών» και «Περί ημικανονικών πολυέδρων».

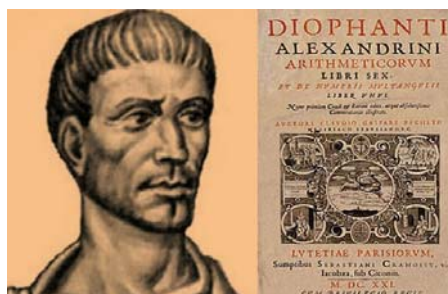
Απολλώνιος

Ο **Απολλώνιος** (262-180 π.Χ.) από την Πέργη της Μ. Ασίας, συγκαταλέγεται μεταξύ των μεγάλων γεωμετρών και αστρονόμων της αρχαιότητας. Έζησε και δίδαξε στην Αλεξάνδρεια. Το βασικό έργο του Απολλώνιου είναι τα "Κωνικά", ένα οκτάτομο σύγγραμμα, από το οποίο έχουν διασωθεί οι επτά τόμοι.

Το έργο του Απολλώνιου μελετήθηκε και σχολιάστηκε εκτενέστατα από μεταγενέστερους μαθηματικούς.

Διόφαντος

Ο **Διόφαντος** έζησε μεταξύ 2ου Π.Χ. και 4ου μ.Χ. αιώνα. Για τη ζωή του γνωρίζουμε ελάχιστα. Έζησε πιθανότατα στην Αλεξάνδρεια.



Το σπουδαιότερο έργο του είναι τα "Αριθμητικά", που αποτελείται από δέκα τρεις τόμους. Από το έργο αυτό διασώζονται σήμερα δέκα τόμοι. Έξι στο πρωτότυπο ελληνικό κείμενο και δέκα σε αραβική μετάφραση, έργο του ελληνικής καταγωγής *Κουστά Ιμπν Λούκα* (90ς μ.Χ. αιώνας).

Ο Διόφαντος θεωρείται ο πατέρας της Άλγεβρας, αφού είναι ο πρώτος που εισηγήθηκε τη χρήση των συμβολισμών με γράμματα διαφόρων αριθμητικών μεγεθών. Οι συμβολισμοί

αυτοί που σήμερα είναι βασικό εργαλείο των μαθηματικών, οδήγησαν τη μαθηματική έκφραση σε υψηλά επίπεδα σαφήνειας, συντομίας, λιτότητας και κομψότητας. Το έργο του Διόφαντου επηρέασε βαθιά τους δημιουργούς των σύγχρονων μαθηματικών *Viète* και *Descartes* τον 17^ο αιώνα. Αναφέρει σχετικά ο Γερμανός φιλόσοφος και μαθηματικός *J. Klein*: «*Η νεώτερη Άλγεβρα και ο φορμαλισμός αναπτύχθηκαν από την άμεση ενασχόληση του Viète με το έργο του Διόφαντου. Οι μεταγενέστεροι απλώς επεξεργάστηκαν λεπτομερέστερα το έργο του.*»

Το έργο του Διόφαντου περιέχει επίλυση προβλημάτων που οδηγούν σε αλγεβρικές εξισώσεις και συστήματα. Στη μέθοδο επίλυσης των προβλημάτων αυτών, δεν εισηγείται απλά την αντικατάσταση των αγνώστων μεγεθών με γράμματα, αλλά εισηγείται συμβολισμούς και συντομογραφίες για ολόκληρο το λογιστικό μέρος της λύσης.

Πτολεμαίος

Ο **Πτολεμαίος** έζησε γύρω στο 150 μ.Χ. στην Αλεξάνδρεια και ανήκει στους μεγάλους αστρονόμους όλων των εποχών.



Το έργο του Πτολεμαίου έφερε αρχικά τον τίτλο «*Μαθηματική Σύνταξις*» και μεταφράστηκε στα αραβικά με τον τίτλο «*Αλμαγέστα*». Με τον τίτλο αυτό παρέμεινε έκτοτε γνωστό το έργο του Πτολεμαίου. Το βιβλίο αυτό, κατά το πρότυπο των Στοιχείων του Ευκλείδη, διαιρείται σε 13 τόμους.

Ο Πτολεμαίος επηρέασε σε πολύ μεγάλο βαθμό και όσο πολύ λίγοι την ανάπτυξη της αραβικής μαθηματικής σκέψης.

Πάππος

Ο **Πάππος** έζησε κατά τον 3ο μ.Χ. αιώνα στην Αλεξάνδρεια και συνέγραψε οκτάτομο έργο με τίτλο «*Μαθηματική Συναγωγή*». Είναι από τους τελευταίους μεγάλους

μαθηματικούς της Αλεξάνδρειας. Από το έργο έχει χαθεί ο πρώτος τόμος και μέρος του δεύτερου τόμου. Το υπόλοιπο έχει διασωθεί. Στο ανεκτίμητης αξίας έργο του, ο Πάππος διέσωσε και σχολίασε μεγάλο μέρος από τα μέχρι τότε γνωστά επιτεύγματα της μαθηματικής επιστήμης. Αρκετά θεωρήματα της γεωμετρίας φέρουν το όνομά του. Η ακρίβεια και ο όγκος των πληροφοριών καθιστούν το έργο του Πάππου σημαντικότερη πηγή της ιστορικής έρευνας.

Κλείνοντας αυτή τη σύντομη αναδρομή, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι όλη αυτή η μαθηματική γνώση, που με εκρηκτικό τρόπο προέκυψε μετά το 600 π.Χ., ήρθε ως αποτέλεσμα της επανάστασης που έφεραν στον τρόπο του «σκέπτεσθαι» οι φιλόσοφοι της Ιωνίας και το σύνολο των προσωκρατικών φιλοσόφων. Είναι αυτοί που υπέδειξαν πρώτοι τα εργαλεία και τις μεθόδους προσέγγισης και κατανόησης του φυσικού κόσμου, που χρησιμοποιούνται έκτοτε, όπως μέτρο, ρυθμός, αρμονία, συμμετρία, αναλογία, τάξη, κόσμος, συνεχές-διακριτό, ομοιογένεια, ισοτροπία.

Εξειδικεύοντας την προσοχή μας στην εξέλιξη της φιλοσοφίας των μαθηματικών, μπορούμε να πούμε ότι το 500 π.Χ. ξεκινάει, ουσιαστικά, το μακρύ ταξίδι της εξιχνίασης της έννοιας του «αριθμού», του «**μεγίστου σοφίσματος**», δώρου του Προμηθέα στους ανθρώπους κατά τον Αισχύλο.

*«...καί μὴν ἀριθμόν, ἔξοχον
σοφισμάτων, ἐξηῦρον αὐτοῖς...»*

(Αισχύλου, «Προμηθεύς δεσμώτης»)

Οι Πυθαγόρειοι ήταν οι πρώτοι που παραβίασαν τη θύρα του άρρητου στη δομή του συνόλου των αριθμών. Αιφνιδιασμένοι, από το μέγεθος της ανακάλυψής τους και για τους λόγους που αναφέραμε, δεν προχώρησαν στην ενδοχώρα. Ο Ζήνων ο Ελεάτης (490-425), λίγο αργότερα, με τα μαθηματικά παράδοξά του, ήταν ένας από αυτούς που υποψιάστηκαν το χάσμα που χωρίζει το διακριτό από το συνεχές. Ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος και ορισμένοι άλλοι, με κορυφαίο τον Εύδοξο, ήταν αυτοί που έκαναν τα πρώτα σημαντικά βήματα στο μεγάλο δρόμο από το διακριτό στο συνεχές, από τους ρητούς στους άρρητους, τους ασύμμετρους αριθμούς.

Είναι αξιοσημείωτο ότι από την εποχή του Ευδόξου και μέχρι, σχεδόν, τις ημέρες μας, η πρόοδος που συντελέστηκε στη μελέτη των ασύμμετρων αριθμών ήταν πολύ αργή. Ο *Cantor* και, παράλληλα και ανεξάρτητα από αυτόν, ο *Dedekind*, ήταν αυτοί που, στο δεύτερο μισό του 19^{ου} αιώνα έδωσαν την σύγχρονη θεωρία των ασύμμετρων αριθμών, χρησιμοποιώντας την νέα σύντομη και σαφή, φορμαλιστική γλώσσα των μαθηματικών και, κυρίως, τις ιδέες του Ευδόξου. Η ομολογία του Dedekind στο θέμα αυτό είναι καταλυτική.

«...αυτός ο τρόπος ορισμού (των άρρητων αριθμών) είναι ήδη διατυπωμένος με τον σαφέστερο δυνατό τρόπο στον φημισμένο ορισμό της ισότητας δύο λόγων που έδωσε ο Ευκλείδης (Στοιχεία, βιβλ.5). Αυτή η ίδια πανάρχαια πεποίθηση αποτέλεσε την πηγή και της δικής μου θεωρίας, του Bertrand, καθώς και άλλων πληρέστερων ή ατελέστερων προσπαθειών θεμελίωσης των άρρητων αριθμών.»

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 – 1916)

Όλα, όσα πολύ συνοπτικά αναφέρθηκαν, δείχνουν καθαρά το πόσο προωθημένη υπήρξε η σκέψη των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και φιλοσόφων. Δεν είναι λίγοι οι συγγραφείς και μελετητές της ελληνικής αρχαιότητας που χαρακτηρίζουν ως «θαύμα» τη γέννηση της φιλοσοφίας, με βασική συνιστώσα τα μαθηματικά, στα παράλια της Ιωνίας. Αν, μάλιστα, σκεφτεί κανείς την εκρηκτική πορεία της μαθηματικής έρευνας κατά τα επόμενα τουλάχιστον 600 χρόνια, ο όρος «θαύμα» μοιάζει να περιγράφει την πραγματικότητα. Όμως, όπως επισημαίνουν και οι μελετητές της ιστορίας της φιλοσοφίας, το να αντιμετωπίζεται το φαινόμενο αυτό ως «θαύμα», δηλαδή ως κάτι ανεξήγητο και υπερφυσικό, είναι μια στάση που αναιρεί την ελληνική συμβολή στην ανθρώπινη διάνοηση, γιατί η προσφορά των αρχαίων Ελλήνων στον τρόπο του «σκέπτεσθαι» είναι η αναζήτηση των φυσικών (και όχι των υπερφυσικών) λογικών καθώς, και των μη αυθαίρετων αιτίων στα φαινόμενα της φύσης. Αν και ξεφεύγει από την επιστημονική μου δικαιοδοσία, θα αποτολμήσω, για λόγους στοιχειώδους πληρότητας της ομιλίας μου να αναφερθώ απολύτως επιγραμματικά, σε δύο, τους σημαντικότερους κατά την άποψή μου, συντελεστές του «θαύματος». Ο πρώτος, είναι η αρχαία ελληνική γλώσσα, η οποία, στην εποχή της έναρξης του «θαύματος» είχε φτάσει σε επίπεδα τελειότητας. Τα έργα του Ομήρου και του Ησιόδου το πιστοποιούν. Και εμείς οι μαθηματικοί ξέρουμε πολύ καλά ότι η γλώσσα είναι πρωτίστως εργαλείο του «σκέπτεσθαι» και δευτερευόντως του «ομιλείν». Ο δεύτερος λόγος

είναι οι νέες συνθήκες που δημιούργησε στις κοινωνίες, η μετάβαση από τη βασιλεία μυκηναϊκού τύπου στις δημοκρατούμενες πόλεις και στην ανάδειξη του καθοριστικού ρόλου του πολίτη. Τα μη επιδεχόμενα αντίρρηση βασιλικά κελεύσματα και οι δογματικά αποδεκτές μυστικιστικές φράσεις της θρησκευτικής τελετής, δίνουν τη θέση τους στην αντιπαράθεση επιχειρημάτων στην αγορά, στον δήμο, μπροστά στο πλήθος. Έτσι ο λόγος και η Πειθώ, θεότητα, ανέκαθεν, του ελληνικού πανθέου, αποκτούν νέο νόημα και κυρίαρχη θέση στις καινούργιες πολιτικές και πολιτειακές δομές. Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να πούμε ότι η συσσωρευμένη εμπειρική γνώση, λειτούργησε ως γόνιμη σπορά στο εύφορο έδαφος των πόλεων, ώστε η καλλιέργεια, με το δυναμικό εργαλείο της γλώσσας, να δώσει πλούσια σοδειά, το «θαύμα»!