

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΓΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Α. ΚΑΡΑΚΩΣΤΑΣ
ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 15 Μαρτίου 2018

ΜΑΓΙΚΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΤΑΞΗΣ n

είναι ένα γεωμετρικὸ τετράγωνο στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ ὁποίου εἶναι καταχωρημένοι φυσικοὶ ἀριθμοὶ (συνήθως οἱ $1, 2, \dots, n^2$) σὲ n ὀριζόντιες καὶ n κατακόρυφες λωρίδες μὲ τέτοιον τρόπο ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν κάθε γραμμῆς, κάθε στήλης καὶ κάθε διαγωνίου νὰ εἶναι τὸ ἴδιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Μαγικὸ τετράγωνο τάξης 3

α	β	γ
δ	ϵ	ζ
η	θ	ι

$$\alpha + \beta + \gamma = \delta + \epsilon + \zeta = \eta + \theta + \iota = \alpha + \delta + \eta =$$

$$= \beta + \epsilon + \theta = \gamma + \zeta + \iota = \alpha + \epsilon + \iota = \eta + \epsilon + \gamma$$

Τὸ σταθερὸ ἄθροισμα λέγεται **μαγικὸς ἀριθμὸς**.

Γενικὸς τύπος
ὅταν ἔχουμε τοὺς ἀριθμοὺς $1, 2, 3, \dots, n^2$

$$\Sigma_n = \frac{1+2+\dots+n^2}{n} = \frac{n^2(n^2+1)}{2n} = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

- 1) ΣΥΝΤΟΜΗ ΙΣΤΟΡΙΑ
- 2) ΔΟΜΗ - ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ
- 3) ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ
- 4) ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ ΚΑΙ ΜΑΓΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΒΡΕΘΗΚΑΝ ΣΕ

Κινέζικες πηγές

Έλληνικές πηγές (έπιγραφές, πρὶν τὸ 1200 π. Χ., Πλατωνικά κείμενα,
Έργο τοῦ Θέωνος τοῦ Σμυρναίου, 130 μ. Χ.

Ωροσκόπια Ἀράβων ἀστρολόγων, 9ος αἰώ. μ. Χ.

Έργο τοῦ Abraham Ben Ezra, 11ος αἰώ.

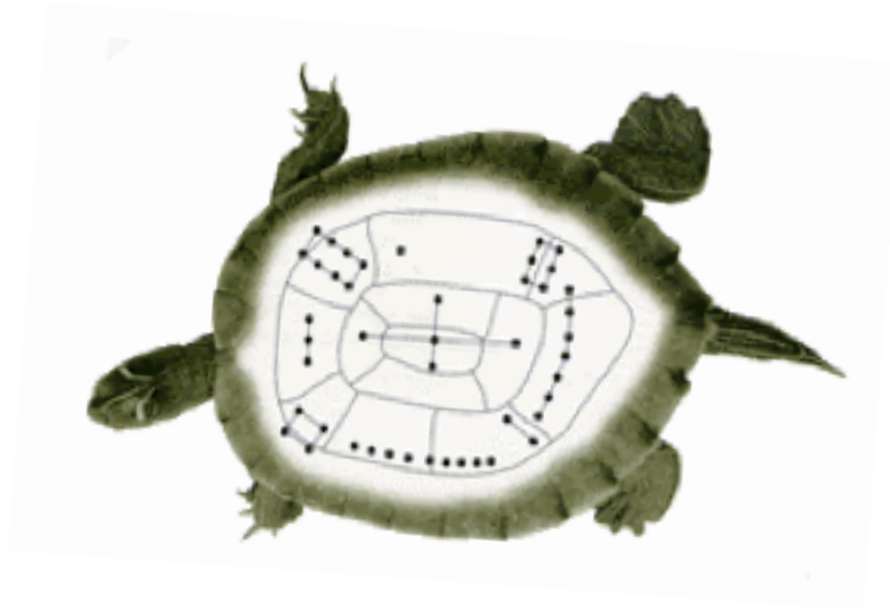
Εὐρήματα στὴν Ἰνδία, 12ος αἰώ. (μαγικά τετράγωνα τάξης 3 καὶ 4).

Έργο τοῦ Μαθηματικοῦ Ἑμμανουήλ Μοσχόπουλου, 1300 μ. Χ.

Έργο τοῦ Φυσικοῦ καὶ Θεολόγου Cornelius Agrippa (16ος αἰώ.)

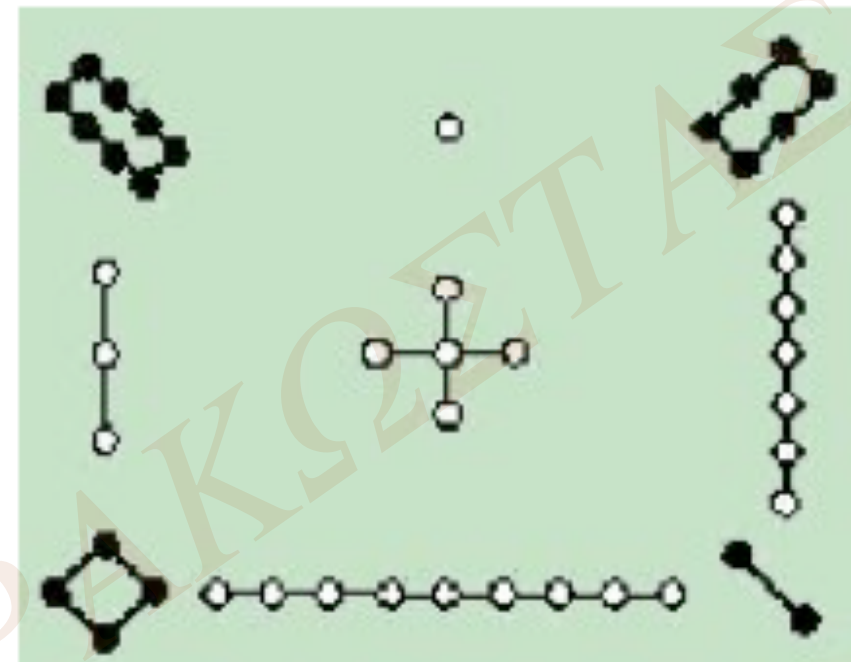
Πρόσφατες ἐργασίες θεωρητικῶν καὶ ἐφαρμοσμένων Μαθηματικῶν

Υι: Αυτοκράτορας Κίνας (≈ 2800 π.Χ.)



ΧΕΛΩΝΑ Loh-Shu

15	8	1	6	
15	3	5	7	
15	4	9	2	
15	15	15	15	15



Συμβολισμοί:

5: ΓΗ
 4 καὶ 9: ΜΕΤΑΛΛΟ
 2 καὶ 7: ΦΩΤΙΑ
 1 καὶ 6: ΝΕΡΟ
 3 καὶ 8: ΞΥΛΟ

Ναὸς στὸ Κχατζουράχο, Ἰνδία



Ἀναπαράσταση μαγικοῦ τετραγώνου, Ἰνδία

Σύμβολο τοῦ θεοῦ **Κουμπέρα**. Φέρνει πλοῦτο καὶ εὐδαιμονία.

Βρέθηκε σὲ διακοσμητικὰ δάπεδα.

4	1	1
ν	ε	μ
ρ	9	45

Μαγικὸ τετράγωνο σὲ ἄραβικὸ
χειρόγραφο τοῦ **Γκεμπέρ**, 13ου αἰώ.

Μαγικὰ τετράγωνα περιττῆς καὶ διπλο-άρτιας τάξης
στὴν μαθηματικὴ πραγματεία τοῦ Ἑλλήνα **Ἐμμανουήλ**
Μοσχόπουλου (1300 μ.Χ.) μὲ τίτλο **Παράδοσις εἰς**
τὴν εὕρεσιν τῶν τετραγώνων ἀριθμῶν.

25	13	1	19	7
16	9	22	15	3
12	5	18	6	24
8	21	14	2	20
4	17	10	23	11

Μαγικὸ τετράγωνο τάξης 4 βρέθηκε σὲ ἔργο τοῦ **Cornelius Agrippa** (1486-1535).

Ἐπίσης ὁ **Cornelius Agrippa** δημιούργησε τὰ παρακάτω μαγικὰ τετράγωνα ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ οὐράνια σώματα ὡς ἑξῆς:



Ἡλιος=111

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

Ἄρης=65

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Δίας=34

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

Κρόνος=15

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Ἀφροδίτη=175

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

Ἑρμῆς=260

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Σελήνη=369

37	78	29	70	21	62	13	54	5
6	38	79	30	71	22	63	14	46
47	7	39	80	31	72	23	55	15
16	48	8	40	81	32	64	24	56
57	17	49	9	41	73	33	65	25
26	58	18	50	1	42	74	34	66
67	27	59	10	51	2	43	75	35
36	68	19	60	11	52	3	44	76
77	28	69	20	61	12	53	4	45

Στὴν ἐνότητα τῶν γλυπτῶν τῶν **Παθῶν τοῦ Χριστοῦ** στὸν ναὸ τῆς **Σαγράδα Φαμίλια** στὴν Βαρκελώνη, ὑπάρχει ἀνάγλυφο μαγικὸ τετράγωνο τάξης 4 ἔργο τοῦ **Josep Subirachs**, (μὲ ἐπανάληψη τῶν ἀριθμῶν 10 καὶ 14). Ἡ μαγικὴ σταθερὰ τοῦ τετραγώνου, εἶναι **33**, καὶ ἀνταποκρίνεται στὴν ἡλικία ποὺ ὁ Χριστὸς εἶχε κατὰ τὴ Σταύρωσή του. Τὸ φυσικὸ μέγεθος τῆς πλάκας εἶναι 1 τ.μ.



1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

3	107	5	131	109	311
7	331	193	11	83	41
103	53	71	89	151	199
113	61	97	197	167	31
367	13	173	59	17	37
73	101	127	179	139	47

Μαγικὸ τετράγωνο
τῆς Ἀποκάλυψης
τοῦ **A. W. Johnson**

$$\Sigma = 666$$



MELENCOLIA

Albrecht Dürer (1471-1528)



$$\Sigma_4 = 34$$

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Ἔτος
δημιουργίας
1514

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

$$10+11+7+6=34$$

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

$$5+9+8+12=34$$

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

$$3+2+15+14=34$$

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

$$16+13+4+1=34$$

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

$$3+8+14+9=34$$

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

$$2+12+15+5=34$$

Τὸ μαγικὸ
τετράγωνο τάξης 16
τοῦ Benjamin
Franklin (1706-1790)

$$\Sigma_{16} = 2056$$

200	217	232	249	8	25	40	57	72	89	104	121	136	153	168	185
58	39	26	7	250	231	218	199	186	167	154	135	122	103	90	71
198	219	230	251	6	27	38	59	70	91	102	123	134	155	166	187
60	37	28	5	252	229	220	197	188	165	156	133	124	101	92	69
201	216	233	248	9	24	41	56	73	88	105	120	137	152	169	184
55	42	23	10	247	234	215	202	183	170	151	138	119	106	87	74
203	214	235	246	11	22	43	54	75	86	107	118	139	150	171	182
53	44	21	12	245	236	213	204	181	172	149	140	117	108	85	76
205	212	237	244	13	20	45	52	77	84	109	116	141	148	173	180
51	46	19	14	243	238	211	206	179	174	147	142	115	110	83	78
207	210	239	242	15	18	47	50	79	82	111	114	143	146	175	178
49	48	17	16	241	240	209	208	177	176	145	144	113	112	81	80
196	221	228	253	4	29	36	61	68	93	100	125	132	157	164	189
62	35	30	3	254	227	222	195	190	163	158	131	126	99	94	67
194	223	226	255	2	31	34	63	66	95	98	127	130	159	162	191
64	33	32	1	256	225	224	193	192	161	160	129	128	97	96	65

Μαγικὰ τετράγωνα τάξεων 8 καὶ 12 τοῦ **Willem Barink** (2007)

$\Sigma_8 = 260$

62	4	13	51	46	20	29	35
5	59	54	12	21	43	38	28
52	14	3	61	36	30	19	45
11	53	60	6	27	37	44	22
64	2	15	49	48	18	31	33
7	57	56	10	23	41	40	26
50	16	1	63	34	32	17	47
9	55	58	8	25	39	42	24

1	120	121	48	85	72	73	60	97	24	25	144
142	27	22	99	58	75	70	87	46	123	118	3
11	110	131	38	95	62	83	50	107	14	35	134
136	33	16	105	52	81	64	93	40	129	112	9
8	113	128	41	92	65	80	53	104	17	32	137
138	31	18	103	54	79	66	91	42	127	114	7
5	116	125	44	89	68	77	56	101	20	29	140
139	30	19	102	55	78	67	90	43	126	115	6
12	109	132	37	96	61	84	49	108	13	36	133
135	34	15	106	51	82	63	94	39	130	111	10
2	119	122	47	86	71	74	59	98	23	26	143
141	28	21	100	57	76	69	88	45	124	117	4

138	8	17	127	114	32	41	103	90	56	65	79
19	125	140	6	43	101	116	30	67	77	92	54
128	18	7	137	104	42	31	113	80	66	55	89
5	139	126	20	29	115	102	44	53	91	78	68
136	10	15	129	112	34	39	105	88	58	63	81
21	123	142	4	45	99	118	28	69	75	94	52
130	16	9	135	106	40	33	111	82	64	57	87
3	141	124	22	27	117	100	46	51	93	76	70
134	12	13	131	110	36	37	107	86	60	61	83
23	121	144	2	47	97	120	26	71	73	96	50
132	14	11	133	108	38	35	109	84	62	59	85
1	143	122	24	25	119	98	48	49	95	74	72

$\Sigma_{12} = 870$

Μαγικὸ τετράγωνο τάξης 12 τοῦ
Donald Morris (1995)

$\Sigma_{12} = 870$

Μαγικὸ τετράγωνο τάξης 16 τοῦ Donald Morris (1996)

256	206	207	253	56	6	7	53	60	10	11	57	244	194	195	241
221	239	238	224	21	39	38	24	25	43	42	28	209	227	226	212
237	223	222	240	37	23	22	40	41	27	26	44	225	211	210	228
208	254	255	205	8	54	55	5	12	58	59	9	196	242	243	193
116	66	67	113	188	138	139	185	184	134	135	181	128	78	79	125
81	99	98	84	153	171	170	156	149	167	166	152	93	111	110	96
97	83	82	100	169	155	154	172	165	151	150	168	109	95	94	112
68	114	115	65	140	186	187	137	136	182	183	133	80	126	127	77
180	130	131	177	124	74	75	121	120	70	71	117	192	142	143	189
145	163	162	148	89	107	106	92	85	103	102	88	157	175	174	160
161	147	146	164	105	91	90	108	101	87	86	104	173	159	158	176
132	178	179	129	76	122	123	73	72	118	119	69	144	190	191	141
64	14	15	61	248	198	199	245	252	202	203	249	52	2	3	49
29	47	46	32	213	231	230	216	217	235	234	220	17	35	34	20
45	31	30	48	229	215	214	232	233	219	218	236	33	19	18	36
16	62	63	13	200	246	247	197	204	250	251	201	4	50	51	1

$$\Sigma_{16} = 2056$$

Έχει αποδειχτεί ότι με τούς αριθμούς 1, 2, ... καὶ με τὴ συμφωνία ὅτι τετράγωνα με ἀναστροφή καὶ κατοπτρισμὸ ταυτίζονται, ὑπάρχει μόνο

1 μαγικὸ τετράγωνο τάξης 1,

κανένα μαγικὸ τετράγωνο τάξης 2,

1 μαγικὸ τετράγωνο τάξης 3,

880 μαγικὰ τετράγωνα τάξης 4,

275.305.224 μαγικὰ τετράγωνα τάξης 5,

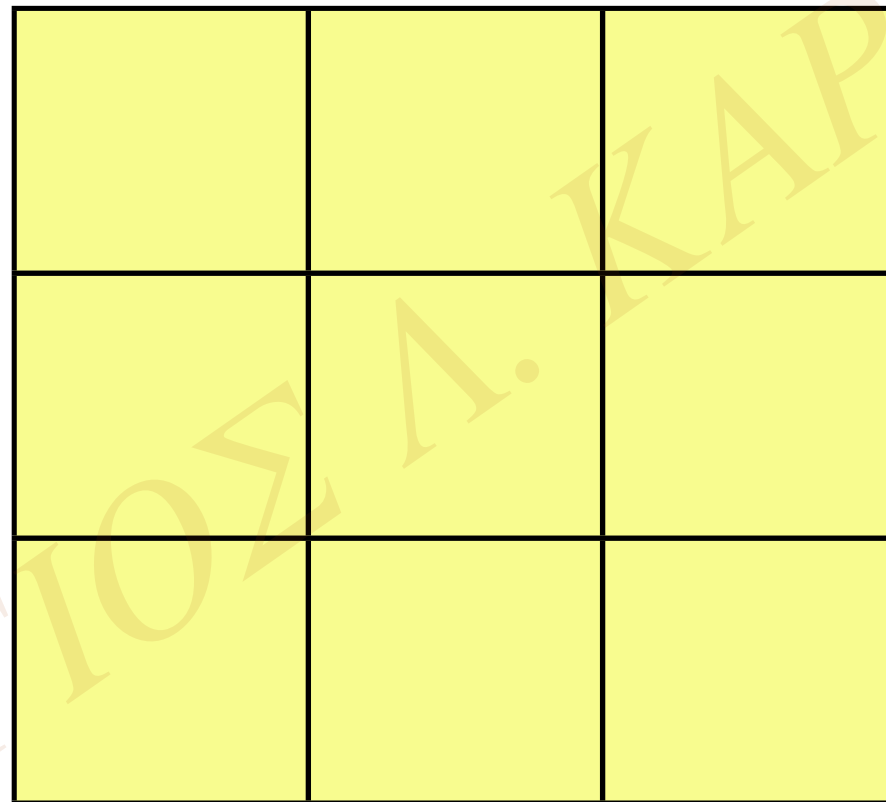
περίπου $1,7745 \times 10^{19}$ μαγικὰ τετράγωνα τάξης 6 (μέθοδος Monte Carlo).

Ἡ γενικὴ μορφή ἑνὸς μαγικοῦ τετραγώνου τάξης 3 προτάθηκε ἀπὸ τὸν
Eduard Lucas (1842-1891):

$c-b$	$c+a+b$	$c-a$
$c-a+b$	c	$c+a-b$
$c+a$	$c-a-b$	$c+b$

ΜΑΓΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΠΕΡΙΤΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

1ος ΤΡΟΠΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ *Siamese* ή *De la Loubère* (1687)



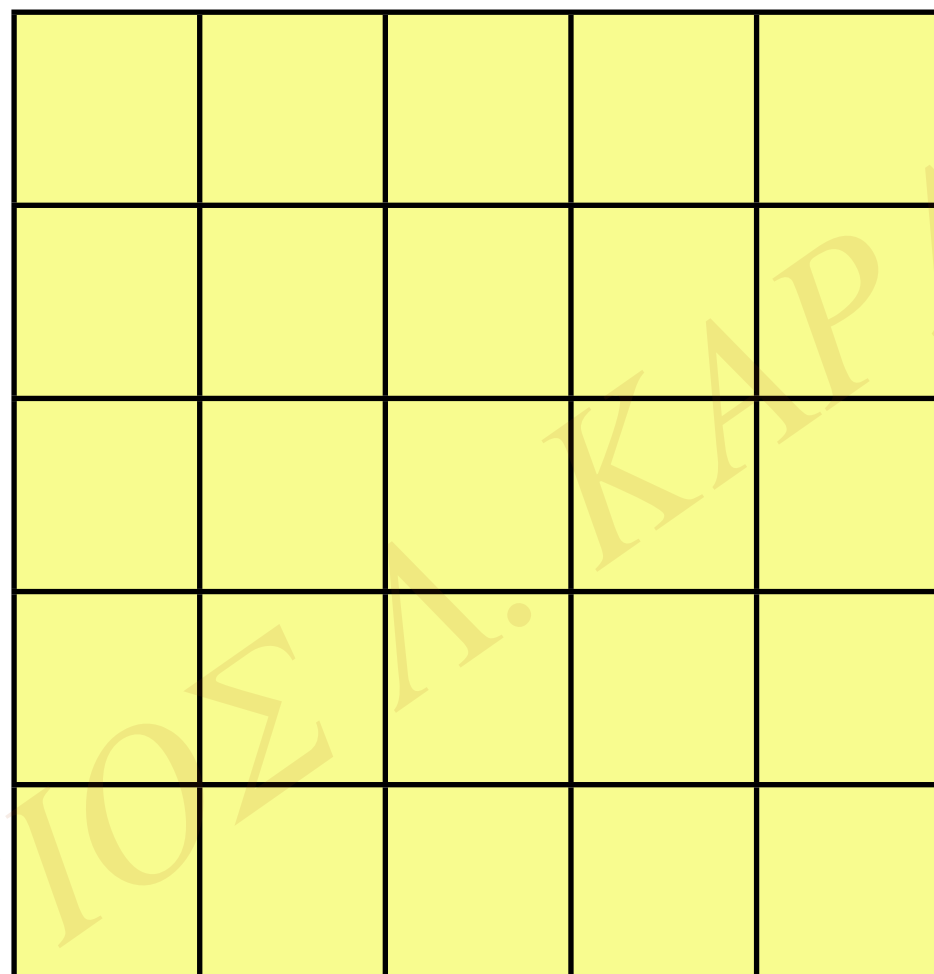
							9	
					6	8		
			3	5	7			
		2	4					
	1							

							9	
					6	8		
			3	5	7			
			4					
1								
		2						

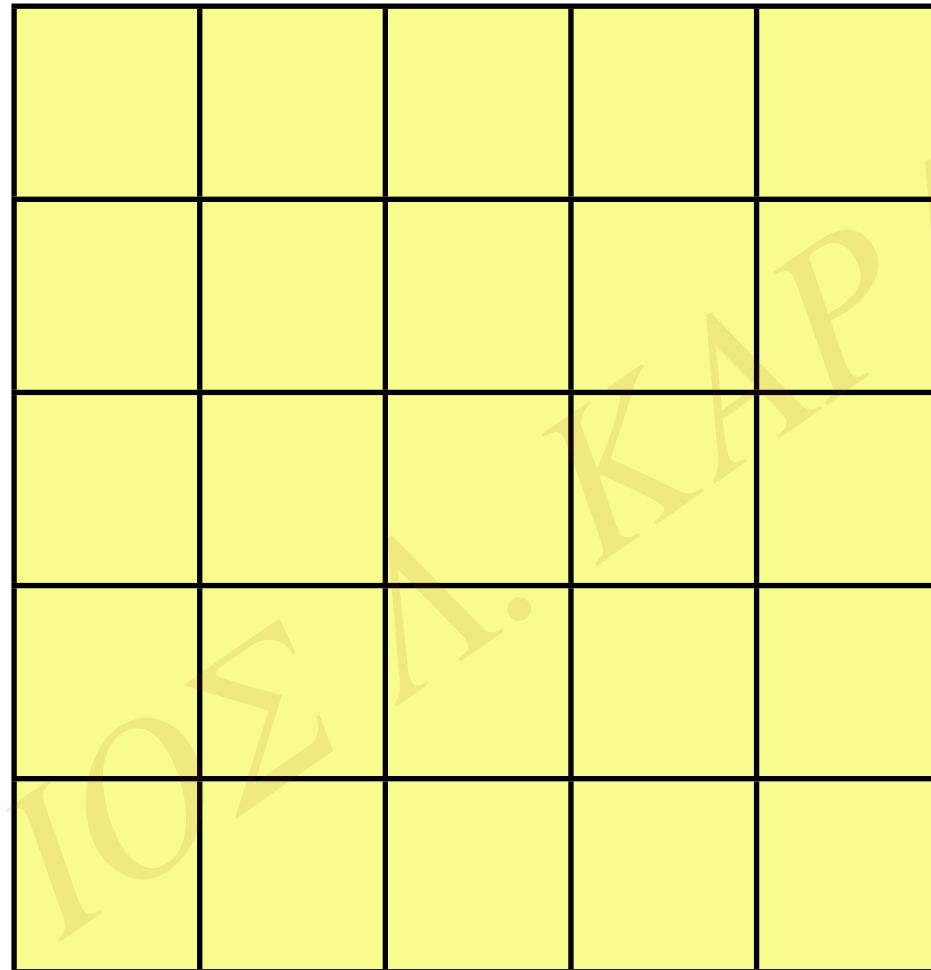
							9	
8	1	6						
3	5	7						
4		2						

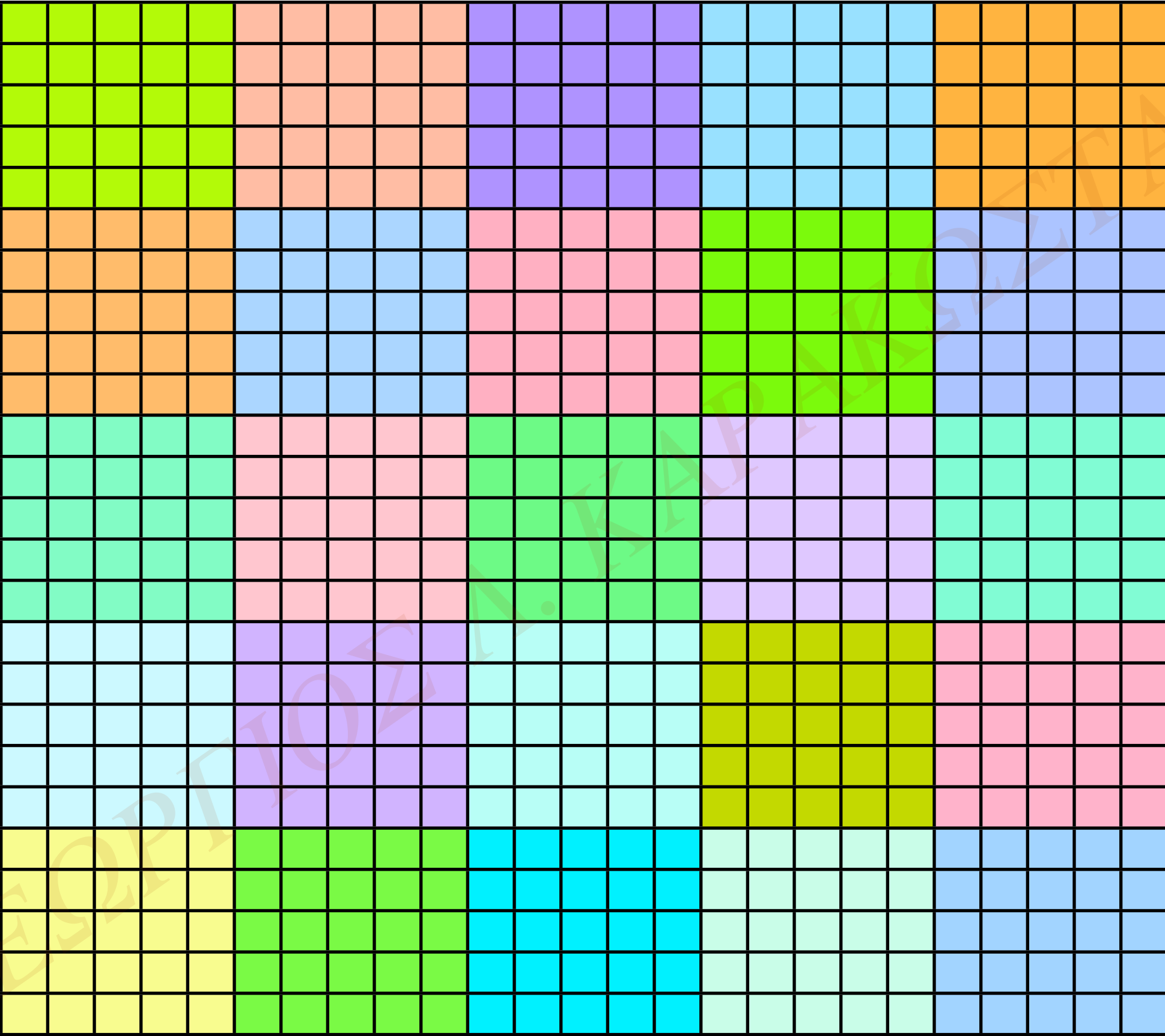
8	1	6						
3	5	7						
4	9	2						

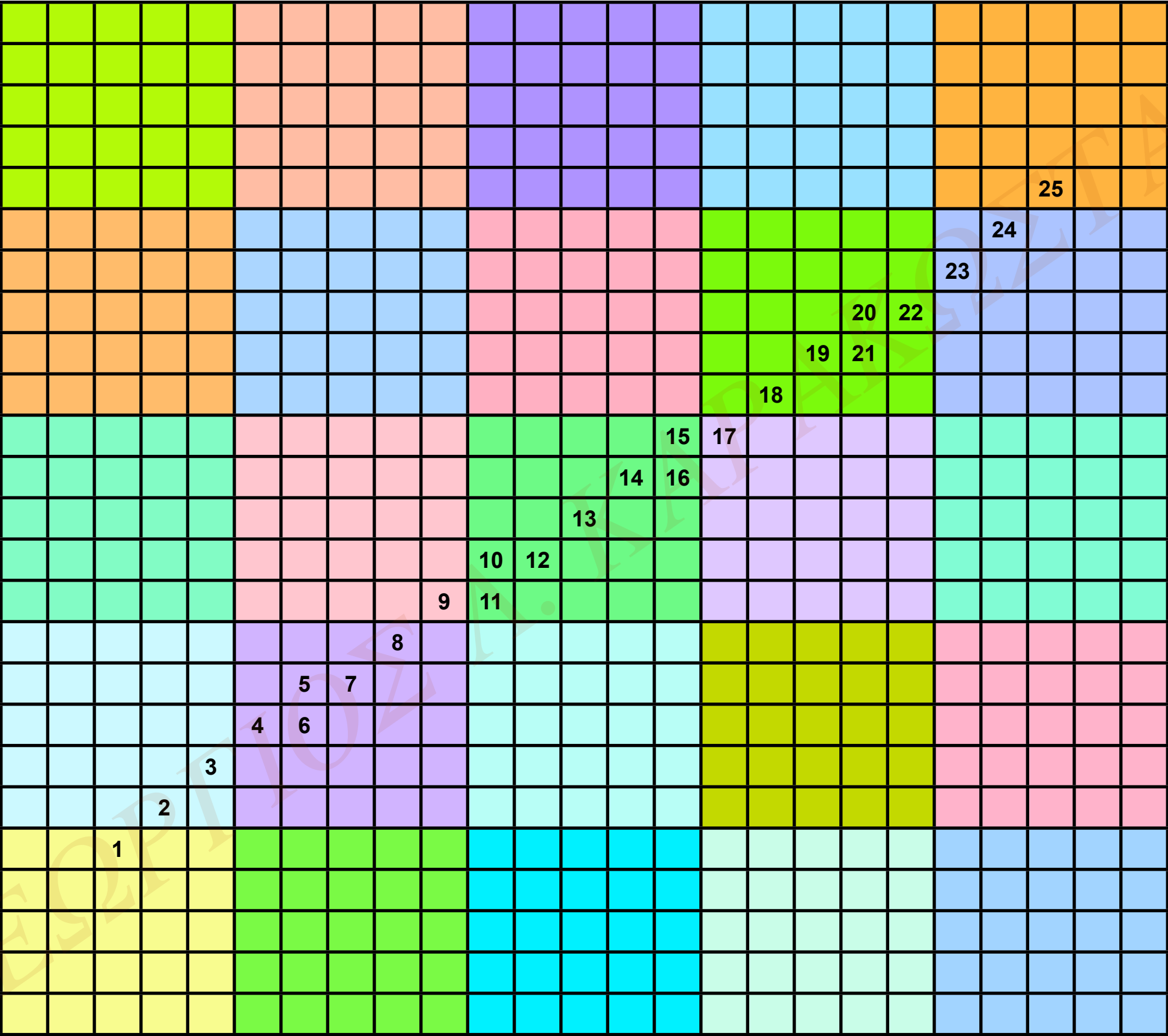
8	1	6
3	5	7
4	9	2

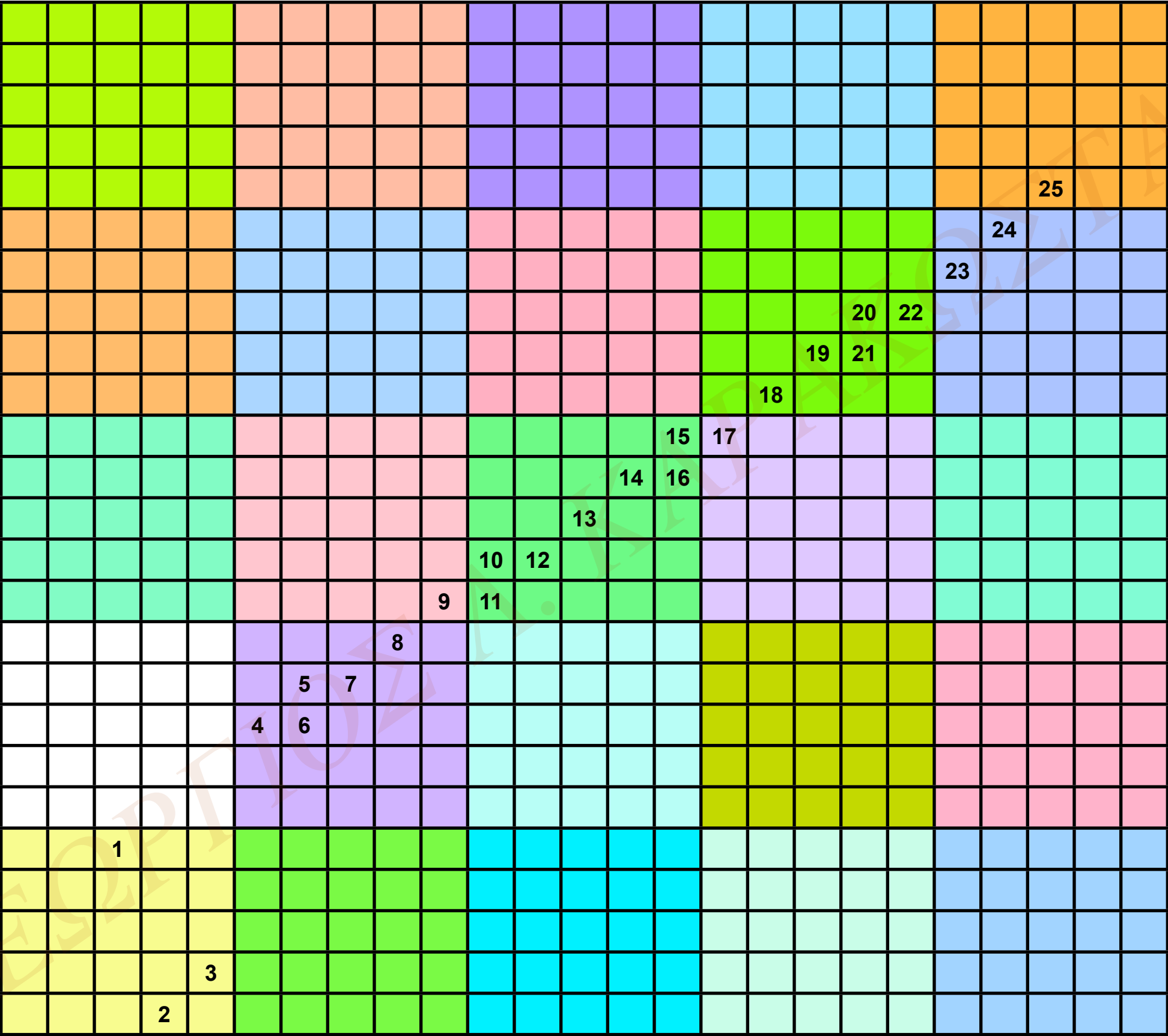


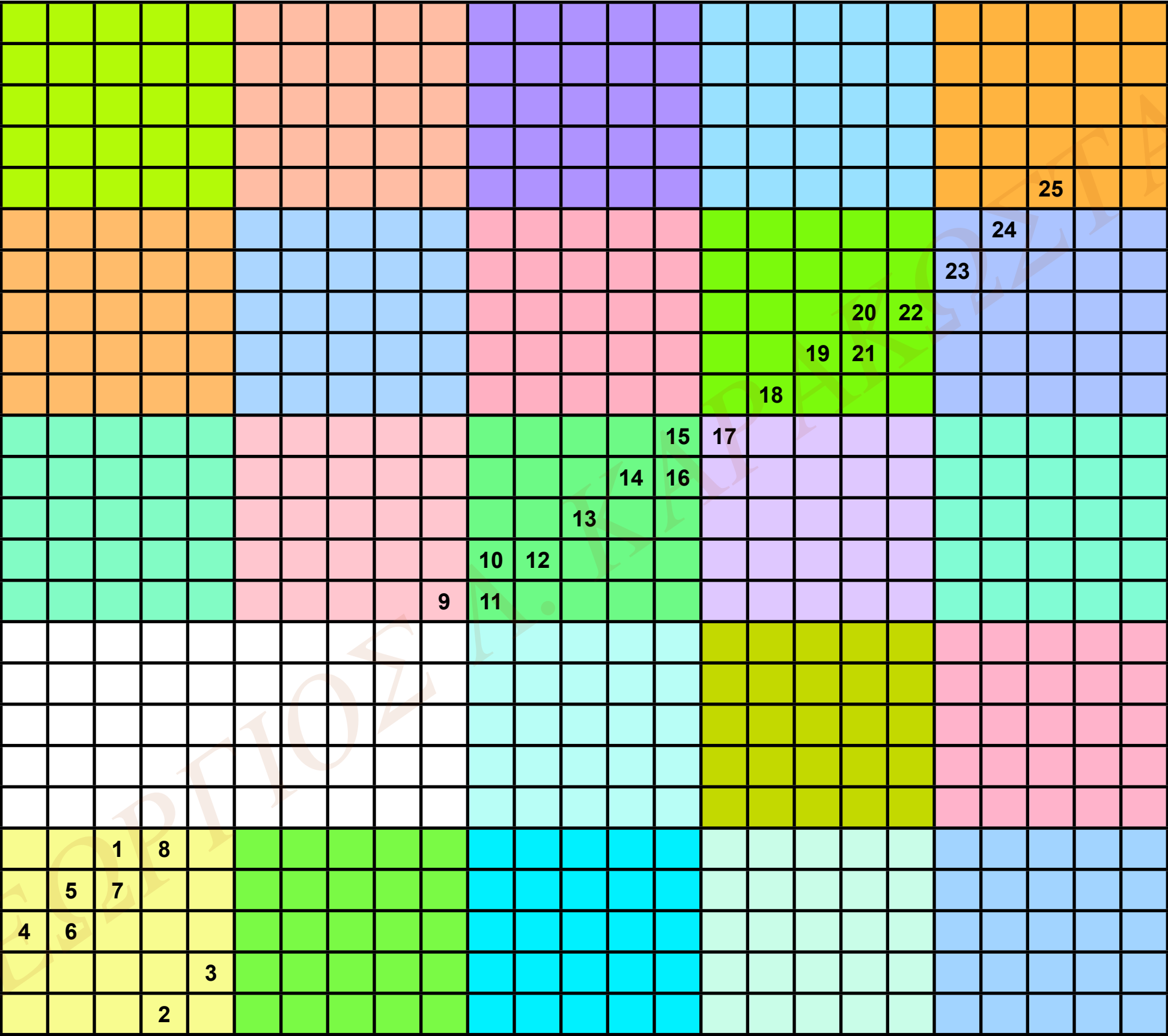
Κατασκευή Μαγικοῦ τετραγώνου τάξης 5.

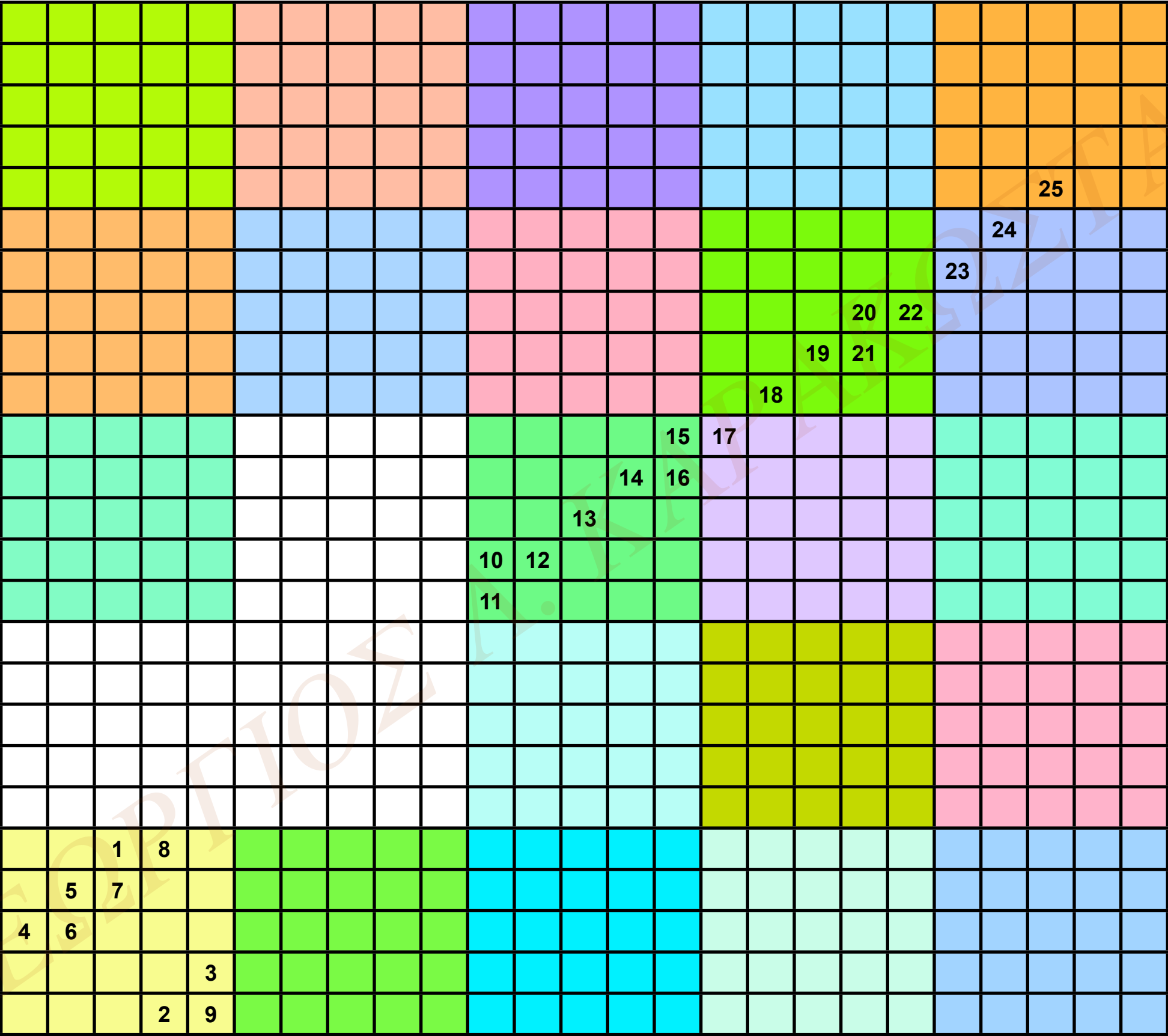


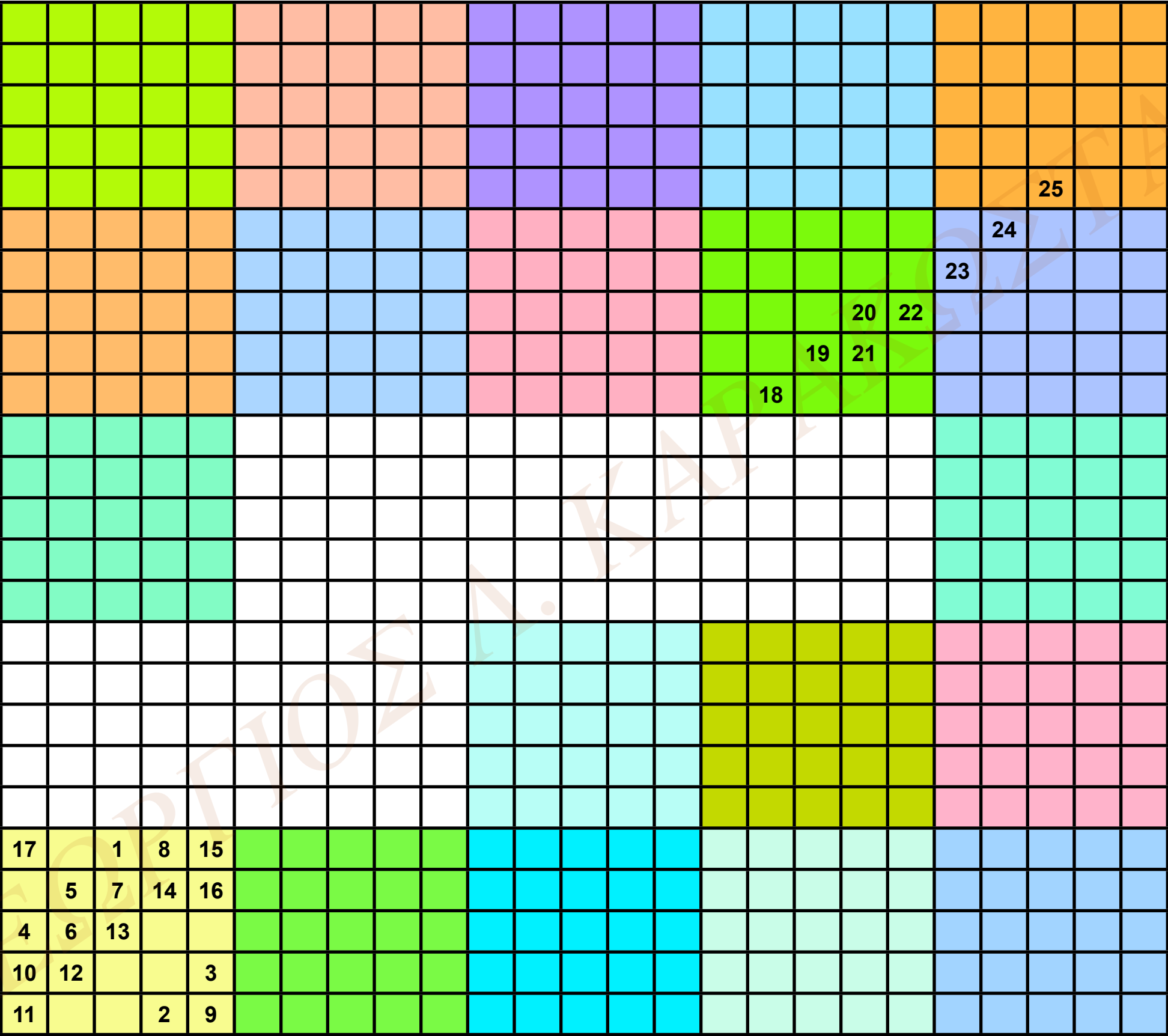


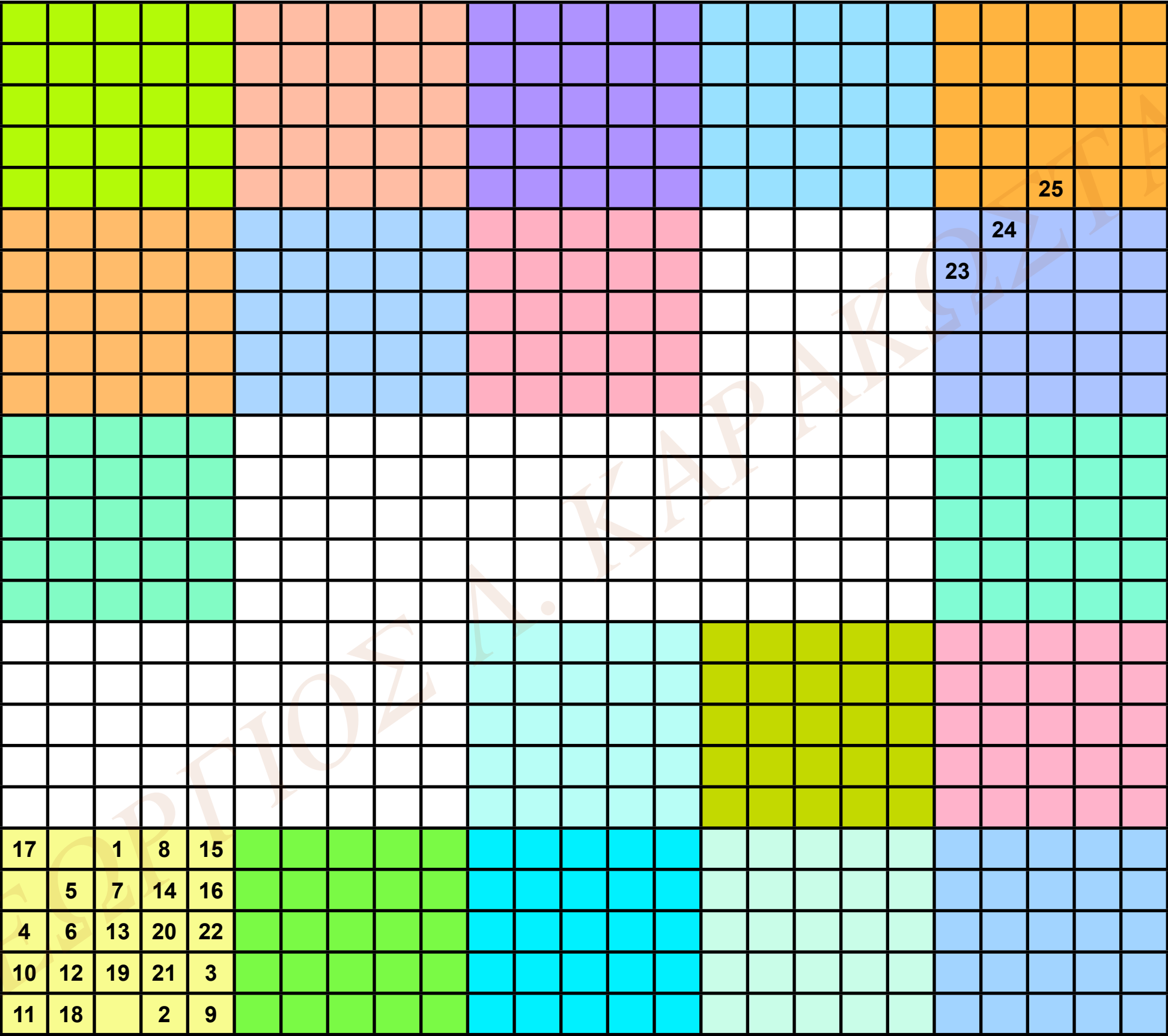












[illegible]

[illegible]

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

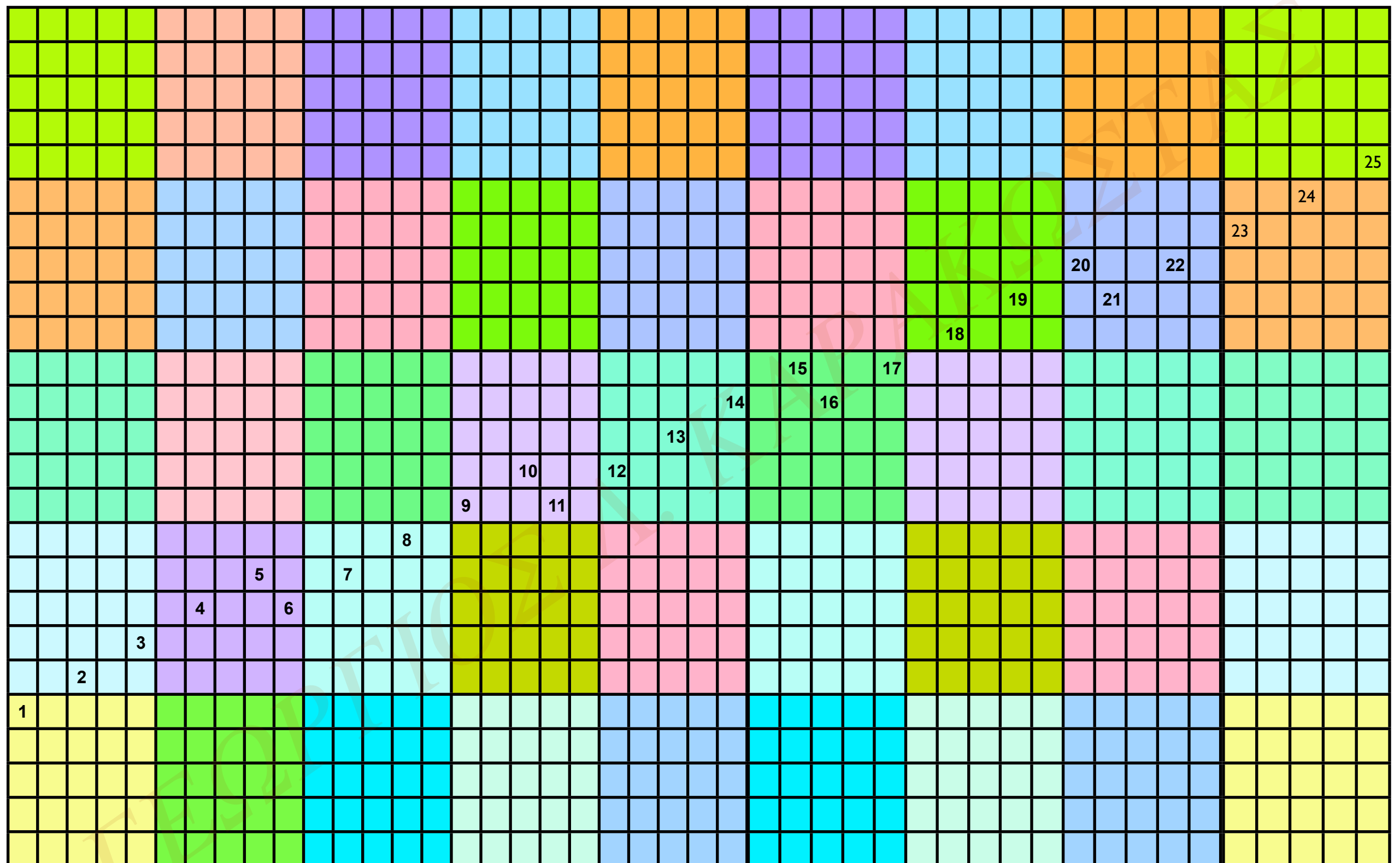
$$\Sigma_5 = 65$$

Παρομοίως κατασκευάζεται μαγικὸ τετράγωνο κάθε περιττῆς τάξης.
Παράδειγμα, τὸ τετράγωνο τάξης 9:

47	58	69	80	1	12	23	34	45
57	68	79	9	11	22	33	44	46
67	78	8	10	21	32	43	54	56
77	7	18	20	31	42	53	55	66
6	17	19	30	41	52	63	65	76
16	27	29	40	51	62	64	75	5
26	28	39	50	61	72	74	4	15
36	38	49	60	71	73	3	14	25
37	48	59	70	81	2	13	24	35

$$\Sigma_9 = 369$$

ἀρχίζοντας μὲ τὸ 1 στὴν πρώτη θέση τῆς πρώτης γραμμῆς:



ἀρχίζοντας με τὸ 1 στὴν πρώτη θέση τῆς πρώτης γραμμῆς:

1	15	24	8	17
23	7	16	5	14
20	4	13	22	6
12	21	10	19	3
9	18	2	11	25

$$\Sigma_5 = 65$$

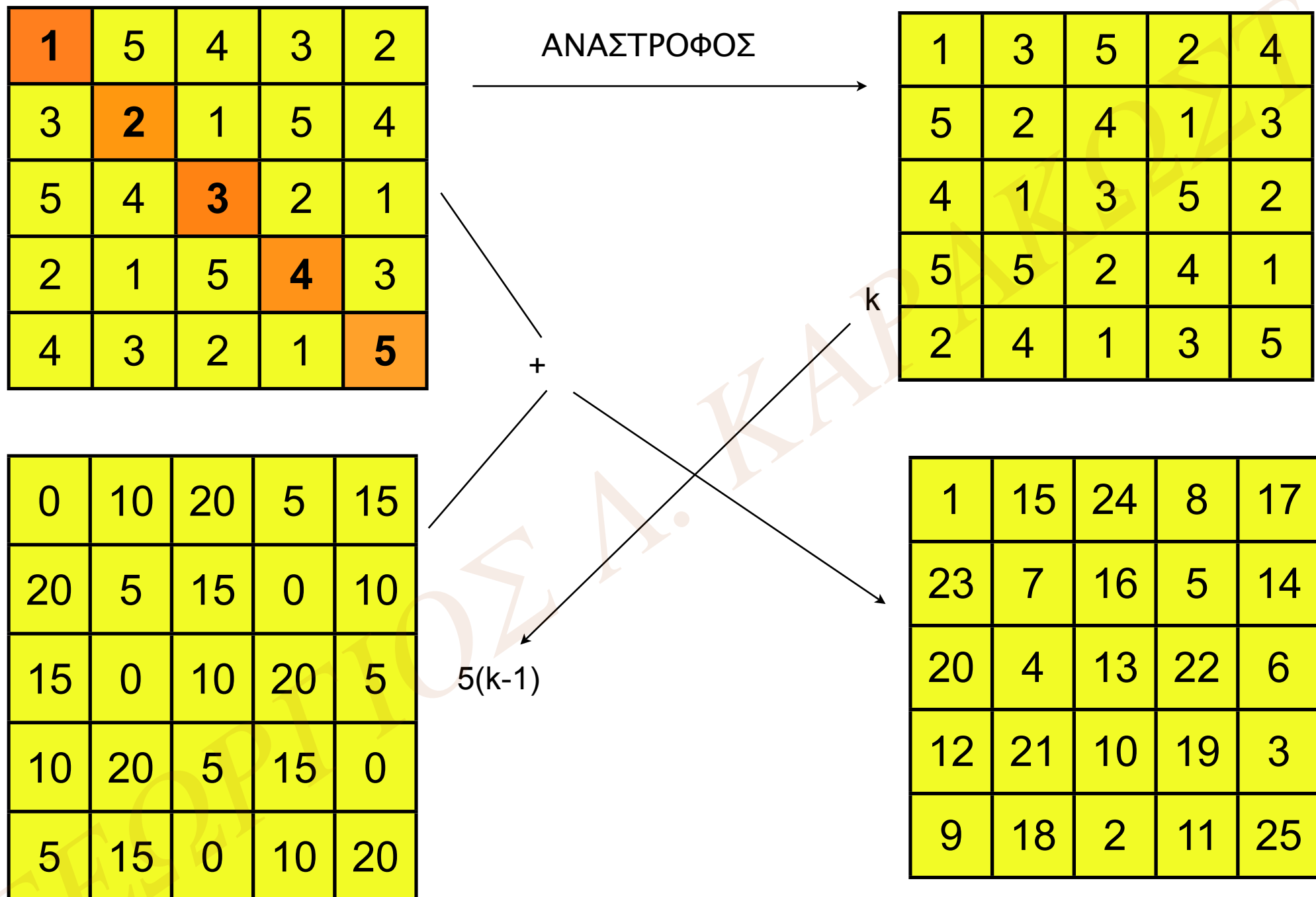
	20	2	40		11	49	31
19	1	39	28	10	48	30	19
7	38	27	9	47	29	18	7
37	26	8	46	35	17	6	37
25	14	45	34	16	5	36	25
13	44	33	15	4	42	24	13
43	32	21	3	41	23	12	43
31	20	2	40	22	11	49	31

$$\Sigma_7 = 175$$

	24	2		14	41	19	46	24
27	5	32	10	37	15	49	27	5
1	35	13	40	18	45	23		35
31	9	36	21	48	26	4	31	9
12	39	17	44	22	7	34	12	39
42	20	47	25	3	30	8	42	20
16	43	28	6	33	11	38	16	
46	24	2	29	14	41	19	46	
27	5	32	10	37	15	49		

ἀρχίζοντας με τὸ 1 στὴ δεύτερη θέση τῆς
πρώτης γραμμῆς:

2ος ΤΡΟΠΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ: ΜΕΘΟΔΟΣ De La Hire



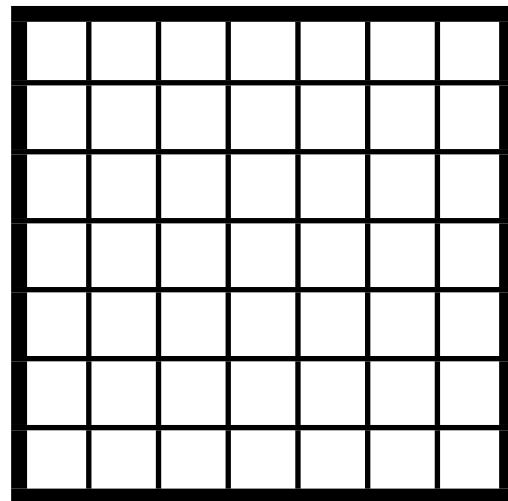
3ος ΤΡΟΠΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ: ΜΕΘΟΔΟΣ Pheru

Ἡ τάξη n εἶναι περιττή.

Συμπληρώνουμε τὰ κενὰ σύμφωνα μὲ τὴ διαδικασία ποὺ περιγράφεται.

				$(n-1)n$	$(n-1)n+n$					
					.	$(n-1)n+n-1$				
					.	$(n-1)n+n-2$				
					.					
					.					
					.					
				$3n+5$	$4n+5$					
				$2n+4$	$3n+4$	$4n+4$				
			3	$n+3$	$2n+3$	$3n+3$				
			n^2-2	2	$n+2$	$2n+2$				
				n^2-1	1	$n+1$				

4ος ΤΡΟΠΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ: ΜΕΘΟΔΟΣ Πυραμίδας, ή Bachet de Mezeriac



4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	27	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	56

						7						
					6		14					
				5		13		21				
			4		12		20		28			
		3		11		19		27		35		
	2		10		18		26		34		42	
1		9		17		25		33		41		49
	8		16		24		32		40		48	
		15		23		31		39		47		
			22		30		38		56			
				29		37		45				
					36		44					
						43						

$$\Sigma_7 = 175$$

ΜΑΓΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΑΡΤΙΑΣ ΤΑΞΗΣ

1ος ΤΡΟΠΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ: De La Hire

1					6
	2			5	
		3	4		
		3	4		
	2			5	
1					6

Συμπληρώνουμε τὰ κενὰ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς

1, 2, 3, ..., 6

ὥστε τὸ ἄθροισμα σὲ κάθε γραμμὴ καὶ στήλῃ νὰ εἶναι ἴσο μὲ

$$1+2+3+\dots+6=21.$$

Σὲ κάθε γραμμὴ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι διαφορετικοί.

1	5	4	3	2	6
6	2	4	3	5	1
6	5	3	4	2	1
1	5	3	4	2	6
6	2	3	4	5	1
1	2	4	3	5	6

ΑΝΑΣΤΡΟΦΟΣ

1	35	34	3	32	6
30	8	28	27	11	7
24	23	15	16	14	19
13	17	21	22	20	18
12	26	9	10	29	25
31	2	4	33	5	36

$$\Sigma_6 = 111$$

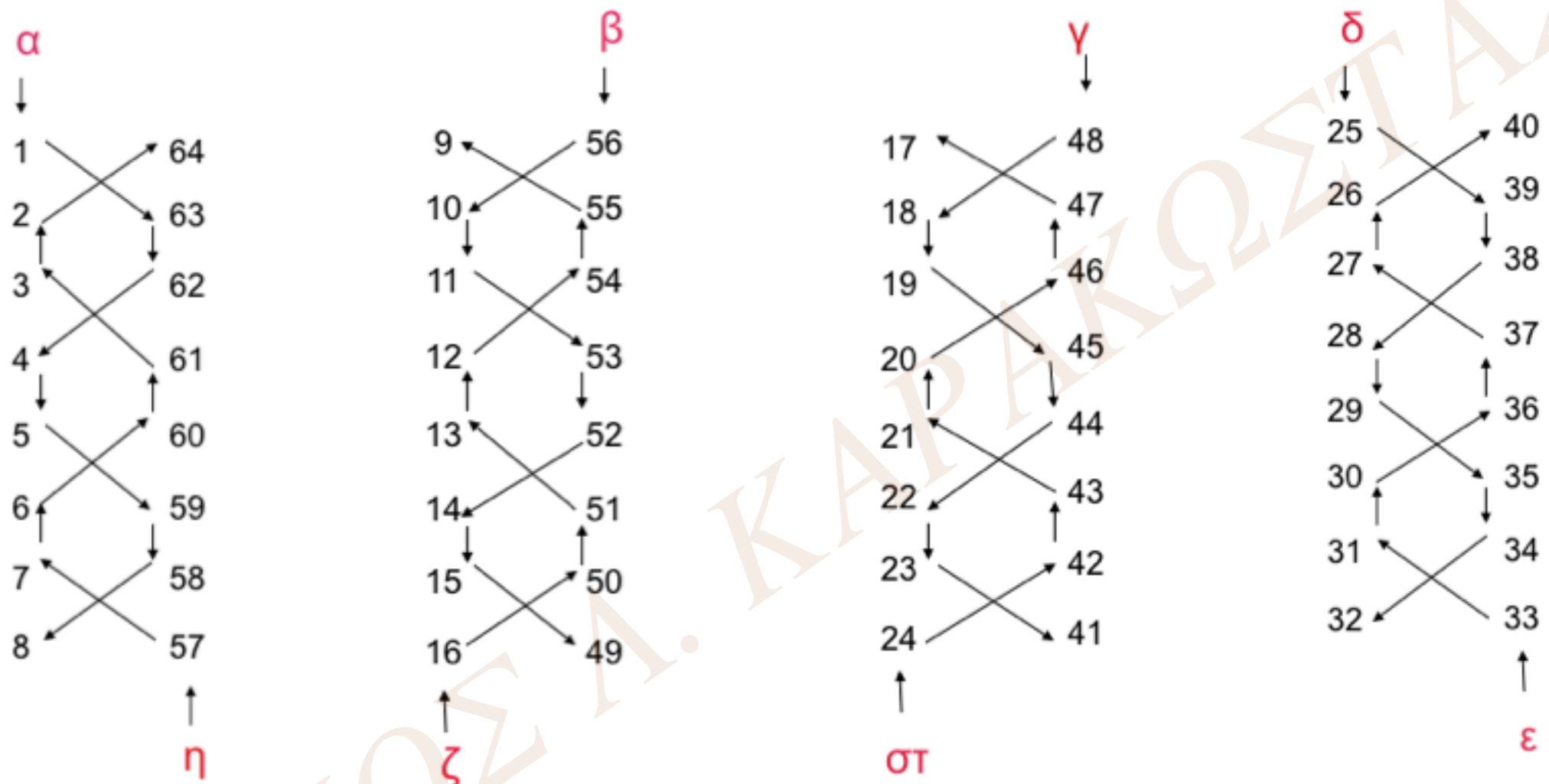
0	30	30	0	30	0
24	6	24	24	6	6
18	18	12	12	12	18
12	12	18	18	18	12
6	24	6	6	24	24
30	0	0	30	0	30

$$6(k-1) \leftarrow k$$

1	6	6	1	6	1
5	2	5	5	2	2
4	4	3	3	3	4
3	3	4	4	4	3
2	5	2	2	5	5
6	1	1	6	1	6

2ος ΤΡΟΠΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ

Μαγικὸ Τετράγωνο διπλο-άρτιας τάξης, π.χ. 8ης



Τὸ μαγικὸ τετράγωνο 8ης τάξης εἶναι αὐτὸ
μὲ γραμμὲς α, β, γ, δ, ε, στ, ζ, η

$$\Sigma_8 = 260$$

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΑΓΙΚΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΤΑΞΗΣ 4.

Χρησιμοποιώντας τὸ γεγονός ὅτι τὸ τετράγωνο εἶναι μαγικὸ μὲ ἄθροισμα $\Sigma = A+B+\Gamma+\Delta$, παίρνουμε ἓνα σύστημα 10 γραμμικῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων. Λύνοντας τὸ σύστημα τοῦτο ὡς πρὸς **A, B, Γ, Δ**, βρίσκουμε τοὺς ὑπόλοιπους ἀριθμοὺς, ὅποτε προκύπτουν μαγικὰ τετράγωνα, ὅπως τὰ ἑξῆς:

A	B	Γ	Δ
α	β	γ	δ
κ	λ	μ	ν
χ	ψ	ζ	ω

A	B	Γ	Δ
$\Delta+1$	$\Gamma-1$	$B-3$	$A+3$
$B-2$	$A+2$	$\Delta+2$	$\Gamma-2$
$\Gamma+1$	$\Delta-1$	$A+1$	$B-1$

A	B	Γ	Δ
$\Gamma+3$	$\Delta-3$	$A+3$	$B-3$
$\Delta-2$	$\Gamma-2$	$B+2$	$A+2$
$B-1$	$A+5$	$D-5$	$\Gamma+1$

Μαγικὸ τετράγωνο τοῦ Euler

Κατασκευάζεται μετὴν κίνηση στὴ σκακέρα μόνο τοῦ ἵππου.

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

$$\Sigma_8 = 260$$

Μαγική σύνθεση μαγικών τετραγώνων

$$\Sigma_9 = 369$$

71	64	69	8	1	6	53	46	51
66	68	70	3	5	7	48	50	52
76	72	65	4	9	2	49	54	47
26	19	24	44	37	42	62	55	60
21	23	25	39	41	43	57	59	6
22	27	20	40	45	38	58	63	56
35	28	33	80	73	78	17	10	15
30	32	34	75	77	79	12	14	16
31	36	29	76	81	74	13	18	11

$$\Sigma = 204$$

71	64	69
66	68	70
76	72	65

$$\Sigma_3 = 15$$

8	1	6
3	5	7
4	9	2

$$\Sigma = 150$$

53	46	51
48	50	52
49	54	47

$$\Sigma = 69$$

26	19	24
21	23	25
22	27	20

44	37	42
39	41	43
40	45	38

$$\Sigma = 177$$

62	55	60
57	59	6
58	63	56

$$\Sigma = 96$$

35	28	33
30	32	34
31	36	29

$$\Sigma = 231$$

80	73	78
75	77	79
76	81	74

$$\Sigma = 42$$

17	10	15
12	14	16
13	18	11

$$\Sigma = 123$$

$$\Sigma_9 = 369$$

204	15	150
69	123	177
96	231	42

Άριθμοί: **15**, **42**=15+27, **69**=42+27,..., **231**=204+27

Ἀλφα-μαγικὸ τετράγωνο

$$\Sigma = 45$$

5	22	18
28	15	2
12	8	25

ὀλογράφως στὴν ἀγγλική

five	twenty two	eighteen
twenty eight	fifteen	two
twelve	eight	twenty five

πλῆθος γραμμάτων

4	9	8
11	7	3
6	5	10

$$\Sigma = 21$$

Χρήση μαγικῶν τετραγώνων

- 1) Ὁ Ἰνδὸς μαθηματικὸς **Βαραχαμίρα** (6ος αἰώ.) χρησιμοποίησε μαγικὰ τετράγωνα γιὰ τὴν ἀναπαράσταση ἀναλογιῶν τῶν συστατικῶν **παρασκευῆς ἄρωμάτων**.
- 2) Μαγικὰ τετράγωνα χρησιμοποιοῦνται σὲ ἀλγορίθμους μετάθεσης χαρακτήρων κατὰ τὴν **κρυπτογράφηση**.
- 3) Μαγικὰ τετράγωνα χρησιμοποιοῦνται στὴ **μηχανικὴ τῶν ρευστῶν** γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῆς κατακράτησης ὑδάτων πάνω σὲ ἐπιφάνειες. Μὲ αὐτὸν τὸν τρόπο ἐπιτυγχάνεται ἰσορροπία τοῦ συστήματος.
- 4) Μαγικὰ τετράγωνα χρησιμοποιοῦνται στὸν **ἠλεκτρομαγνητισμὸ** γιὰ τὴν περιγραφή τῆς ταλάντωσης κίνησης ἀτόμων (**Peter Loly**, 2003).
- 5) **Magic Square Composition** (MSC), εἶναι μιὰ ὁλοκληρωμένη μουσικὴ σύνθεση (κυρίως τοῦ ρυθμοῦ) μὲ τὴ βοήθεια ὑπολογιστῆ χρησιμοποιῶντας μαγικὰ τετράγωνα (Davies, 1977).
- 6) **Musical Magic Square** (MMS) ἀναφέρεται σὲ ἀναπαράσταση μελωδίας, ἀλλὰ καὶ 12-τονης μουσικῆς σύνθεσης μὲ τὴ μορφή μαγικοῦ τετραγώνου (Schoenberg, 1947).

ΙΔΙΟΤΗΤΑ: Κέντρο βάρους = Γεωμετρικὸ κέντρο

(Fahimi, **An introduction to Magic Squares and their Physical Applications**, 2015)



Ο **Elisha Scott Loomis** (1882-1940) στο βιβλίο του με τίτλο **The Pythagorean Proposition** (όπου παρουσιάζει 376 αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος) χρησιμοποιεί τὰ ἑξῆς συμπλέγματα μαγικῶν τετραγώνων γιὰ πέντε «ἀποδείξεις».

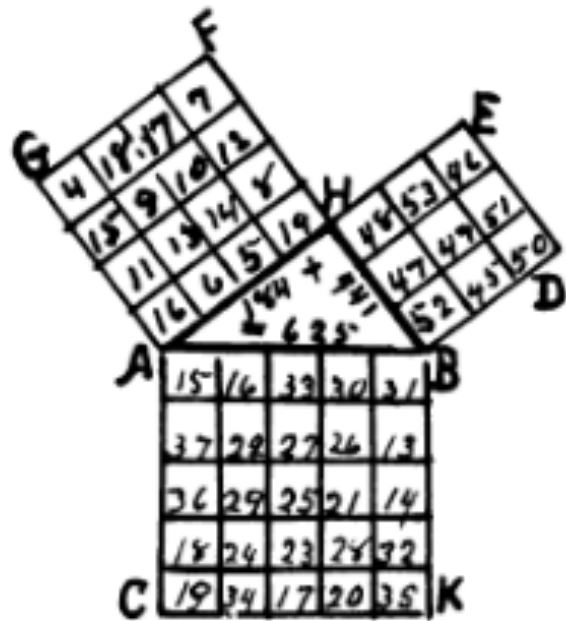


Fig. 355

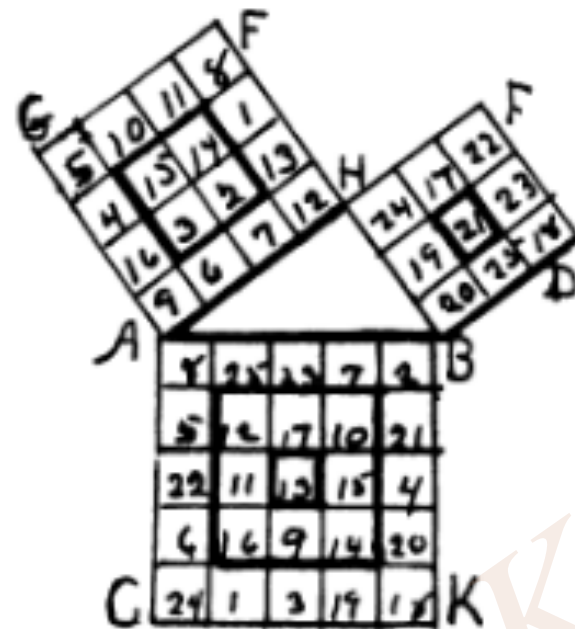


Fig. 357

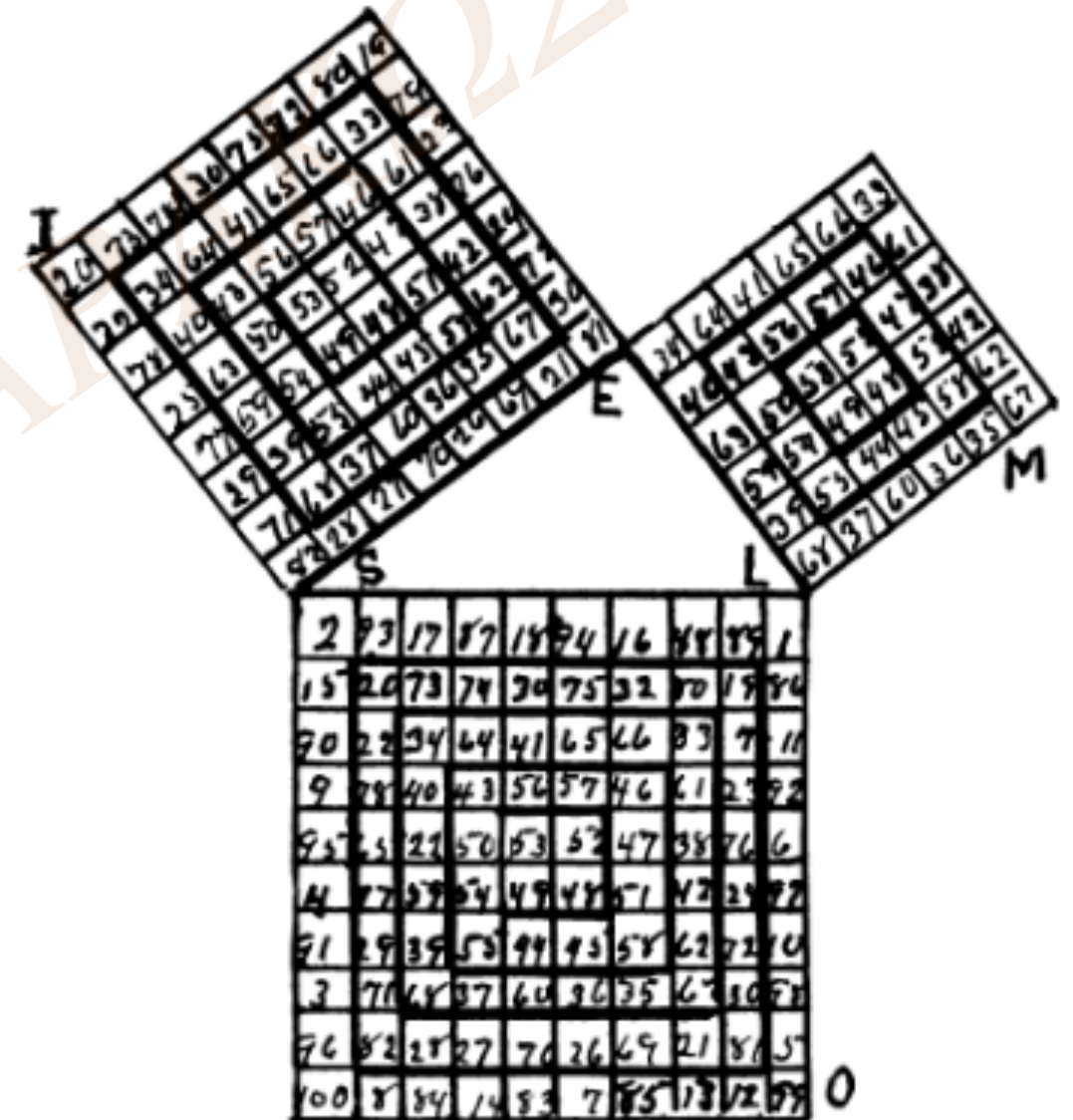


Fig. 359

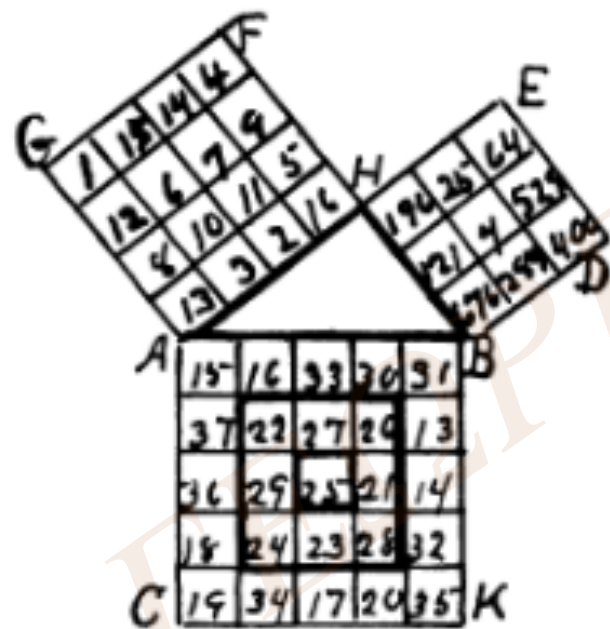


Fig. 356

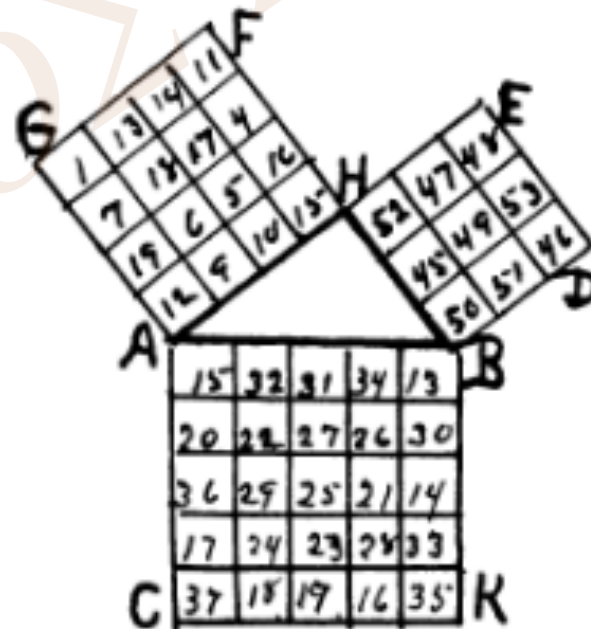


Fig. 358

Ἡ πόλη Μακάο στὴν Κίνα, τὸ 2014
ἐξέδωσε σειρὰ γραμματοσήμων
ἀφιερωμένη στα μαγικὰ τετράγωνα
καὶ τὴν ἱστορία τους.

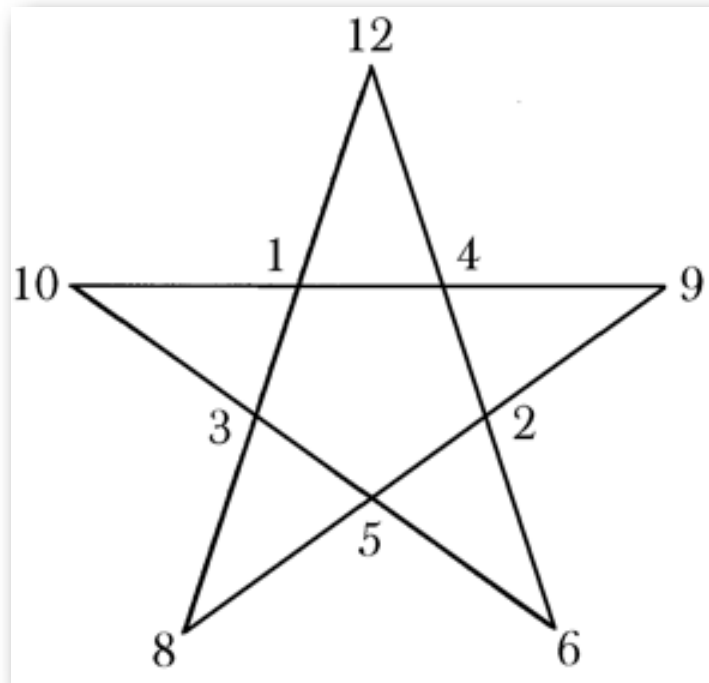


$$\Sigma = 33$$

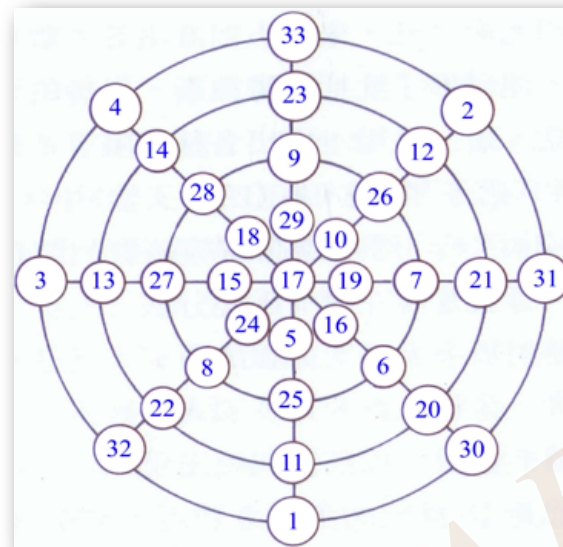
Μενταγιὸν μὲ μαγικὸ τετράγωνο



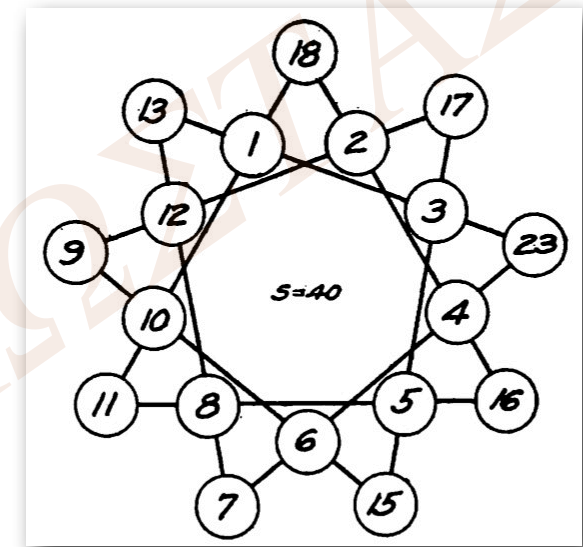
‘Υπάρχει ένα μεγάλο πλήθος μαγικῶν ἀριθμοσυνθέσεων, ὅπως, γιὰ παράδειγμα οἱ ἑξῆς:



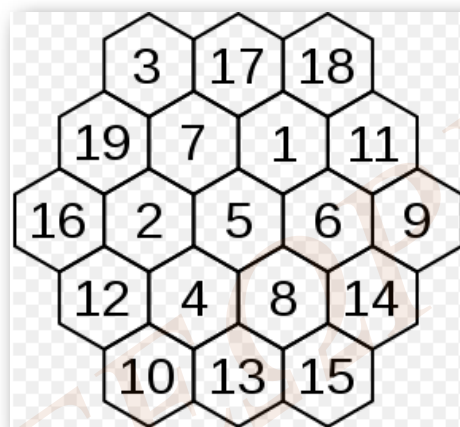
$$\Sigma = 24$$



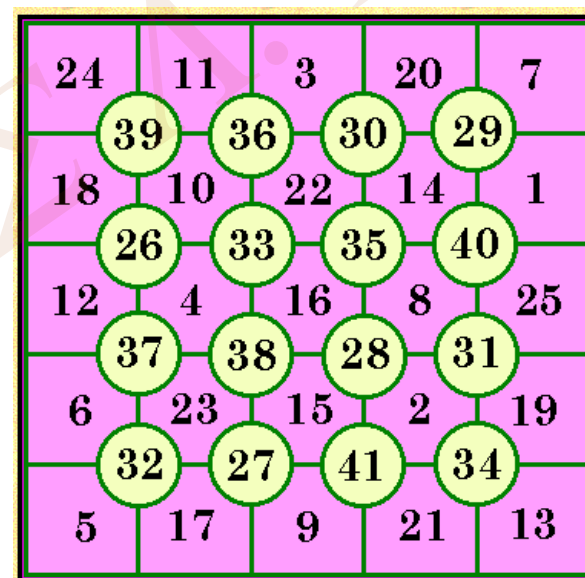
$$\Sigma = 136 \text{ but } 17$$



$$\Sigma = 40$$



$$\Sigma = 38$$



$$\text{Kenneth Kelsey } 134 + 65 = 199$$



$$\Sigma = 27$$

ΚΥΚΛΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

999999:7= 142857

$\Sigma = 27$

1	x	142857	=	1	4	2	8	5	7
2	x	142857	=	2	8	5	7	1	4
3	x	142857	=	4	2	8	5	7	1
4	x	142857	=	5	7	1	4	2	8
5	x	142857	=	7	1	4	2	8	5
6	x	142857	=	8	5	7	1	4	2

142
+
857

999

1x7=7
5x7=35
25x7=175
125x7=875
625x7=4375
3125x7=21875

...

142857

2x7=14
4x7=28
8x7=56
16x7=112
32x7=224
64x7=448

...

142857142857...

Πρῶτοι ἀριθμοὶ μικρότεροι
τοῦ 100 ποὺ παράγουν
κυκλικοὺς ἀριθμοὺς:
7, 17, 19, 23, 29, 47,
59, 61, 97

Thursday, March 15, 2018

ΜΑΓΙΚΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΤΟΥ Harry A. Sayles (1916)

9.999.999.999.999.999.999 : 19=052 631 578 947 368 421=:A:≈1/19

1 x A =

2 x A =

3 x A =

4 x A =

5 x A =

6 x A =

7 x A =

8 x A =

9 x A =

10 x A =

11 x A =

12 x A =

13 x A =

14 x A =

15 x A =

16 x A =

17 x A =

18 x A =

0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1
1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2
1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3
2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4
2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5
3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6
3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7
4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8
4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9
5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0
5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1
6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2
6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3
7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4
7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5
8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6
8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7
9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8

$$\Sigma = 81$$

ΑΛΛΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Μαγικὰ τετράγωνα με πραγματικούς ἀριθμούς θεωρούμενα ὡς πίνακες ἔχουν πολλές ιδιότητες.

Γιὰ παράδειγμα, εἶναι προφανές ὅτι
Κάθε μαγικὸς πίνακας ἔχει ιδιοτιμὴ τὸν μαγικὸ του ἀριθμό.
καὶ

Τὸ σύνολο ὅλων τῶν μαγικῶν πινάκων ἀποτελεῖ διανυσματικὸ
χώρο ὑπεράνω τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ὁ **James E. Ward** (2010) ἀπέδειξε ὅτι

Ἡ διάσταση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου ὅλων τῶν μαγικῶν
πινάκων τάξης n εἶναι ἴση με $n(n-2)$.

Ἡ διάσταση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου ὅλων τῶν μαγικῶν
πινάκων τάξης n καὶ **με μαγικὸ ἀριθμὸ 0** εἶναι ἴση με $n(n-2)-1$.

Μαγικὰ τετράγωνα με μιγαδικούς ἀριθμούς.

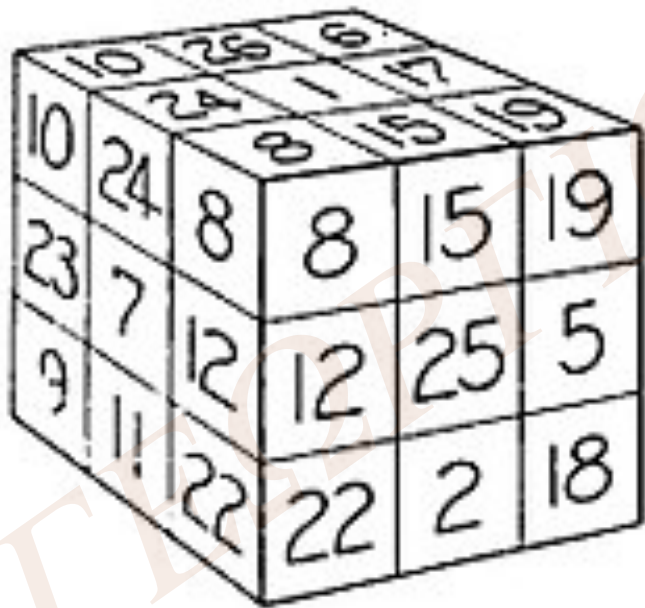
Sudoku (1979)

9	3	4	5	8	1	7	6	2
8	1	6	2	9	7	5	4	3
2	7	5	3	4	6	8	9	1
6	5	9	1	3	2	4	7	8
1	8	3	7	5	4	9	2	6
7	4	2	8	6	9	3	1	5
4	6	8	9	2	3	1	5	7
3	9	1	6	7	5	2	8	4
5	2	7	4	1	8	6	3	9

Κύβος τοῦ Ernő Rubik (1974)



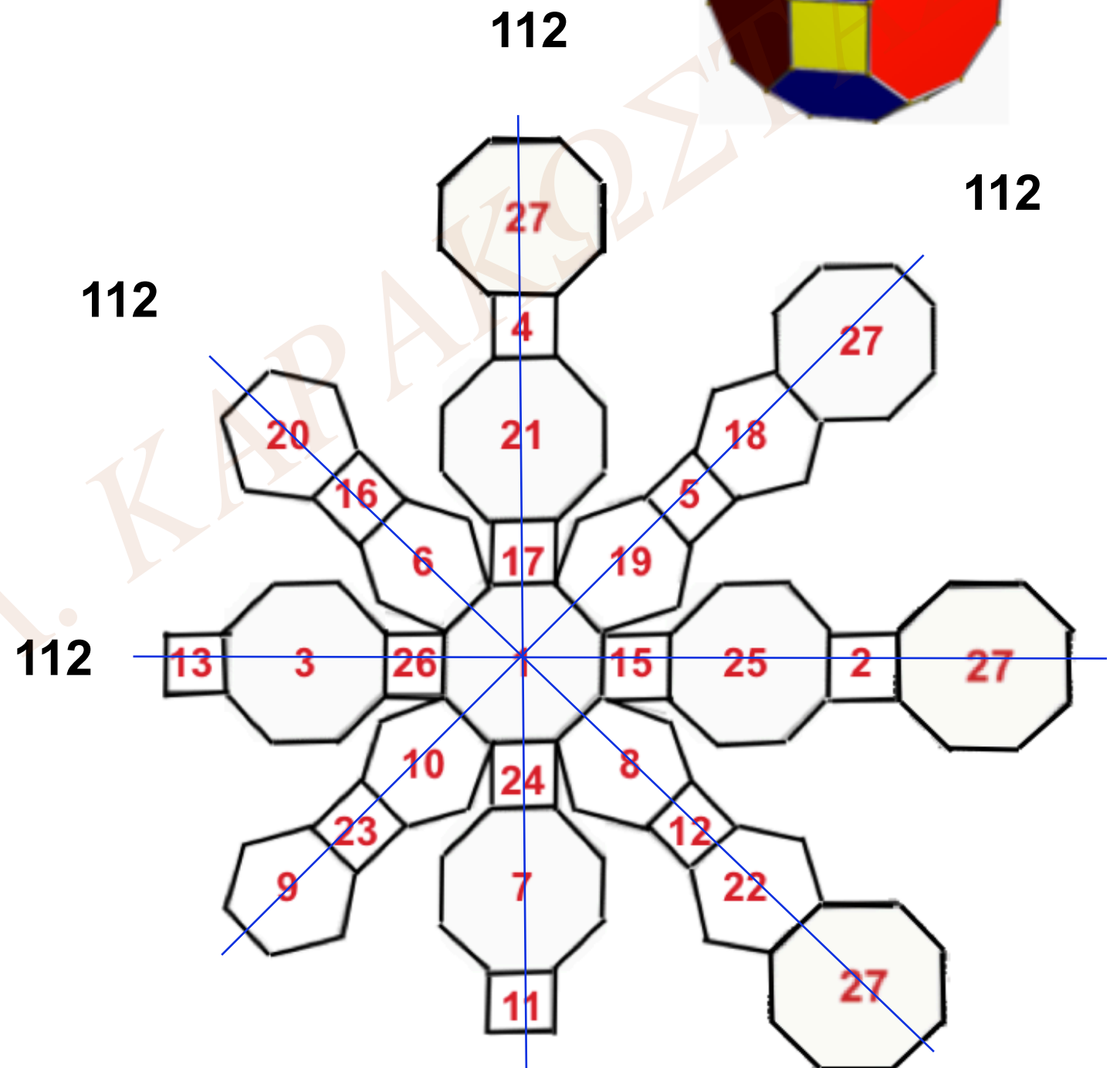
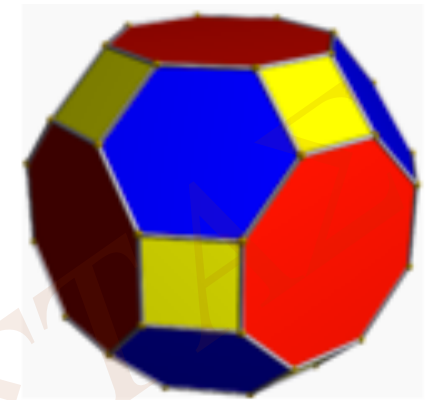
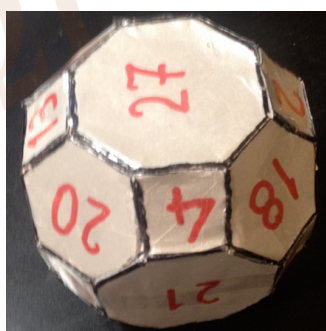
Μαγικὸς κύβος Pierre de Fermat (1640)



$\Sigma=28$

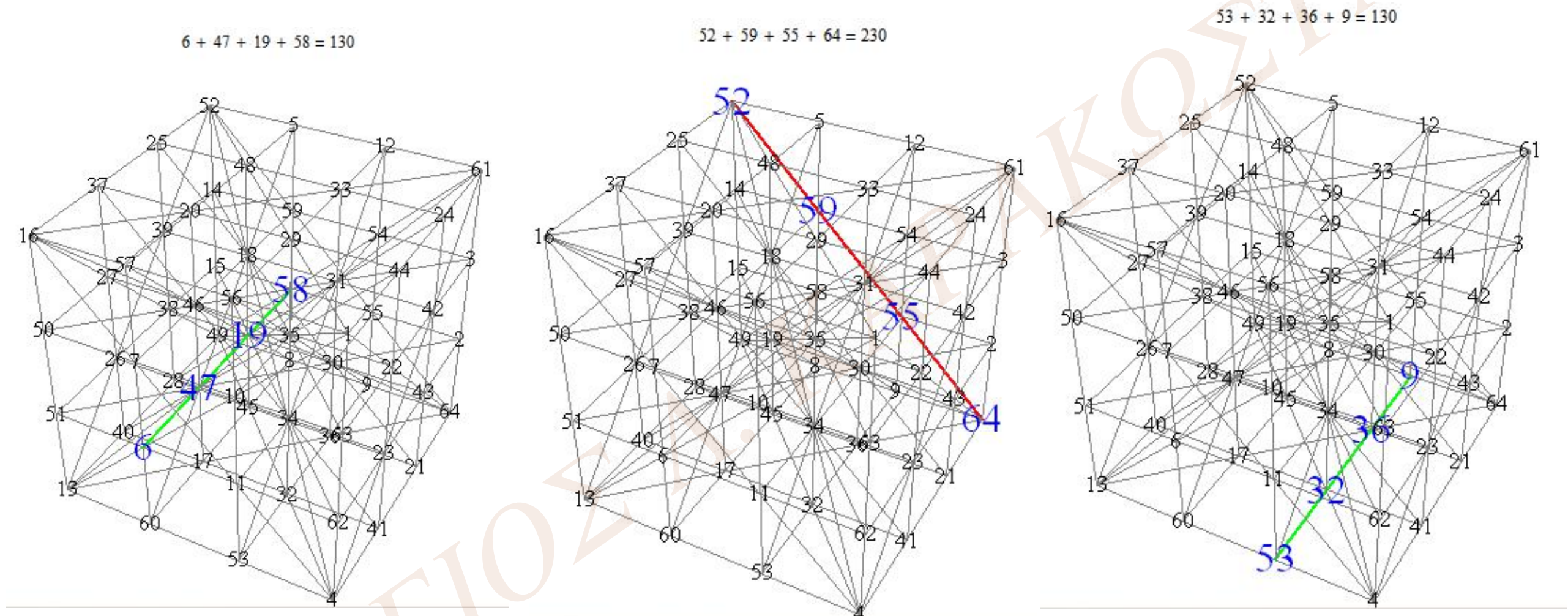
			9	13	20			
			23	3	16			
			10	26	6			
9	23	10	10	26	6	6	16	20
23	7	24	24	1	17	17	21	4
10	12	8	8	15	19	19	5	18
			8	15	19			
			12	25	5			
			22	2	18			
			22	2	18			
			11	27	4			
			9	13	20			

Κόλουρο κυβοκτάεδρο Γ. Λ. Καρακώστας (1987)



14, λείπει
Ἀντιδιαμετρικοὶ ἀριθμοὶ: ἄθροισμα 28

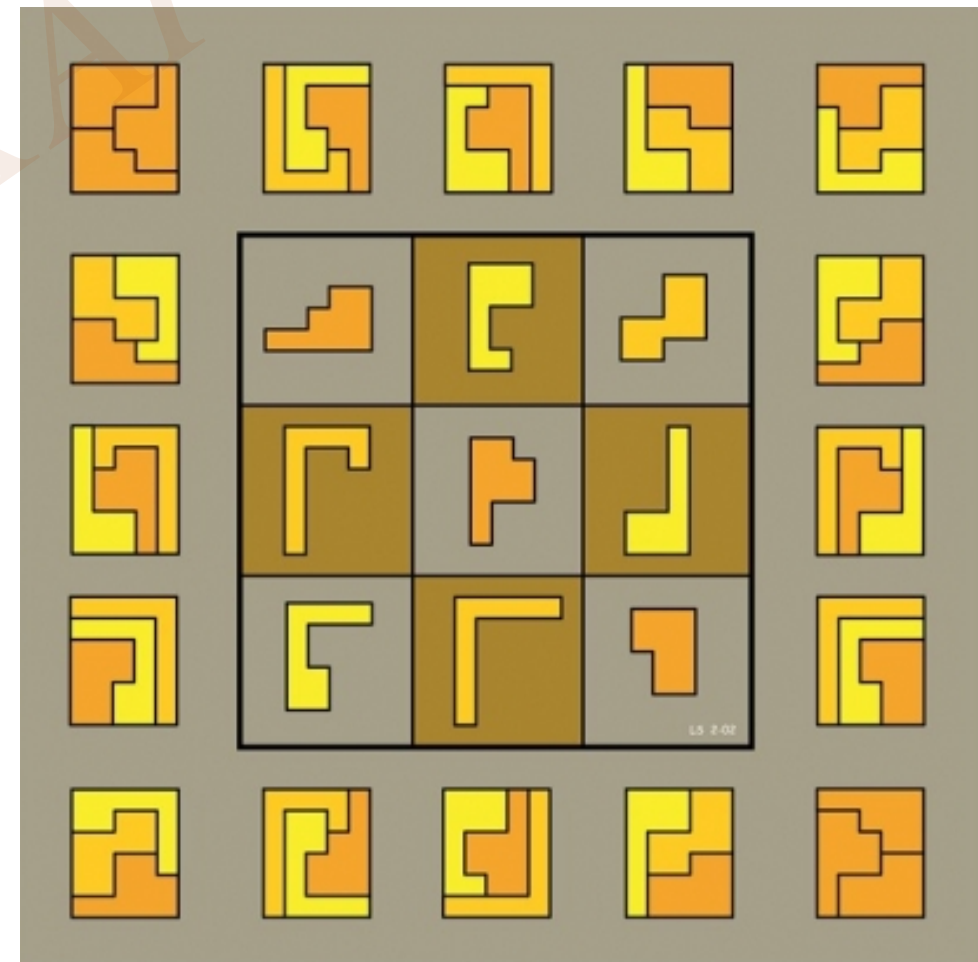
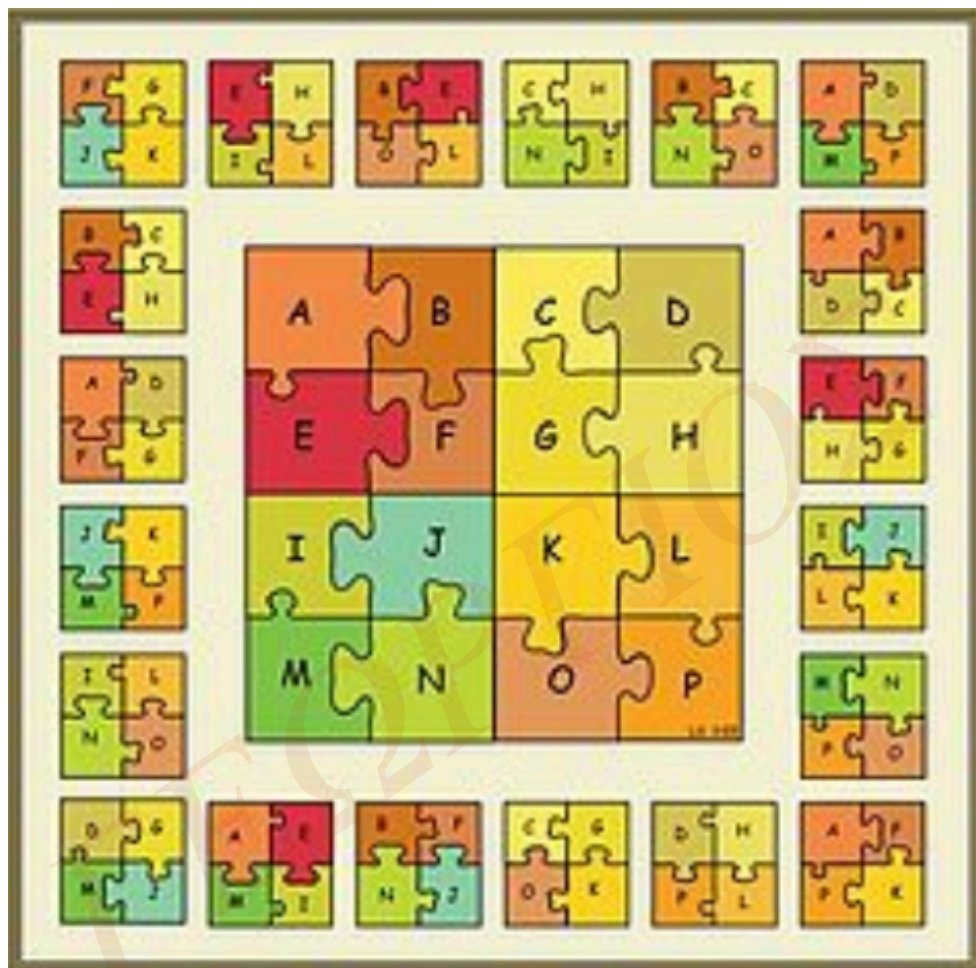
Fermat (1640): Μαγικός κύβος τάξης 4 (64 γραμμές άθροισμα 130, από 76)

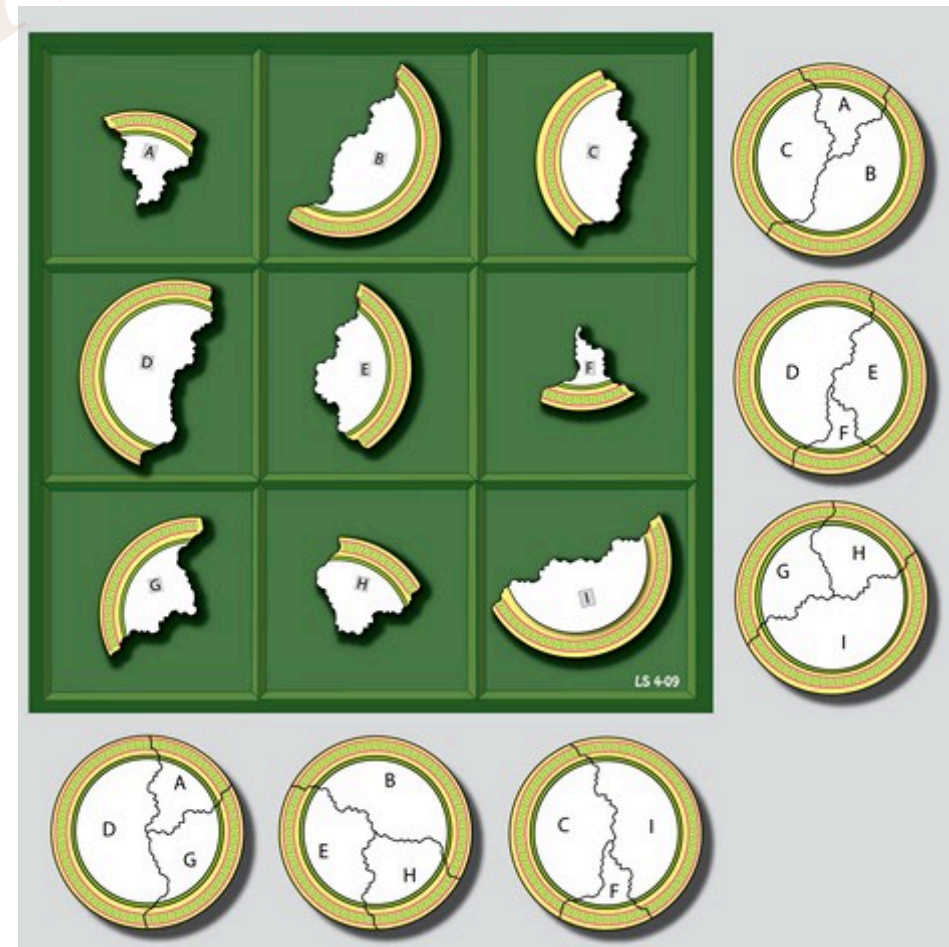
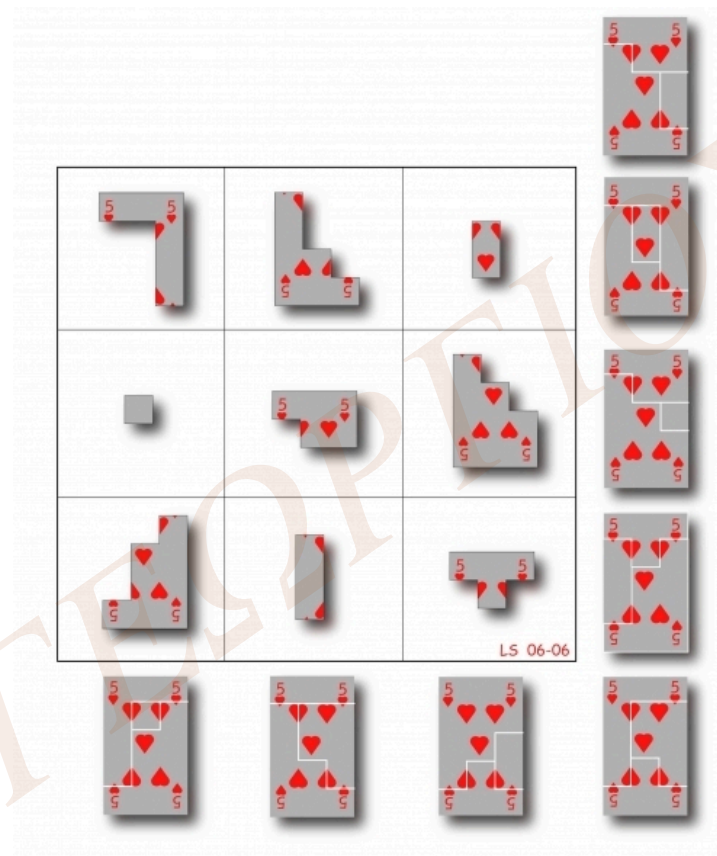
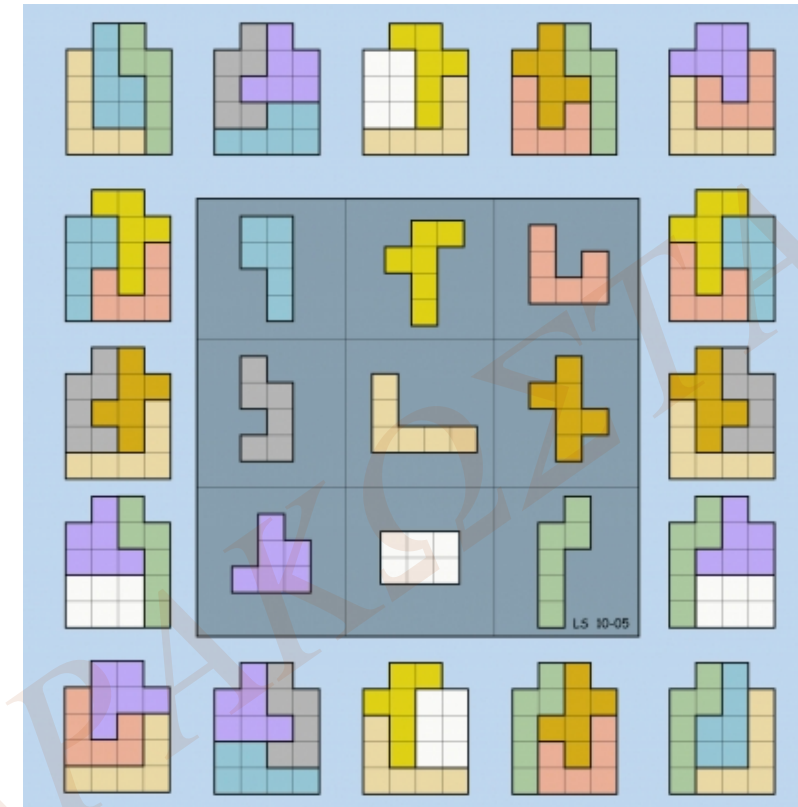
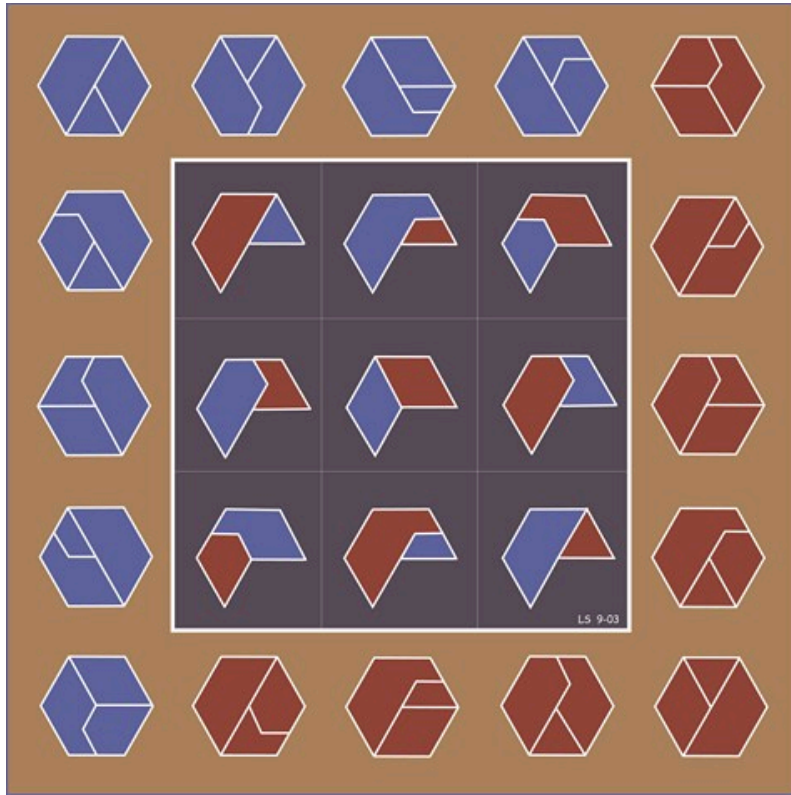


Richard Schroepel (1970):
Δέν υπάρχει πλήρης κύβος τάξης 4

ΓΕΩΜΑΓΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

Είναι τετράγωνα όπου οί άριθμοί άντικαθίστανται με σχήματα τέτοια ώστε συνδυαζόμενα κατὰ μήκος κάθε γραμμής, κάθε στήλης καί κάθε διαγωνίου νά σχηματίζουν ίδια γεωμετρικά σχήματα.





ΜΑΓΙΚΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Τò 1770 ó **Euler** έστειλε στòν **Lagrange**
ένα μαγικό τετράγωνο τάξης 4 καì με
τετράγωνα άριθμών.

68^2	29^2	41^2	37^2
17^2	31^2	79^2	32^2
59^2	28^2	23^2	61^2
11^2	77^2	8^2	49^2

$$\Sigma=8515$$

Martin Gardner (2004)

25^2	45^2	15^2	14^2	44^2	5^2	20^2
16^2	10^2	22^2	6^2	46^2	26^2	42^2
48^2	9^2	18^2	41^2	27^2	13^2	12^2
34^2	37^2	31^2	33^2	0^2	29^2	4^2
19^2	7^2	35^2	30^2	1^2	36^2	40^2
21^2	32^2	2^2	39^2	23^2	43^2	8^2
17^2	28^2	47^2	3^2	11^2	24^2	38^2

$$\Sigma = 5432$$

1^2	2^2	31^2	3^2	20^2
22^2	16^2	13^2	5^2	21^2
11^2	23^2	10^2	24^2	7^2
12^2	15^2	9^2	27^2	14^2
25^2	19^2	8^2	6^2	17^2

$$\Sigma = 1375$$

2^2	1^2	36^2	5^2	0^2	35^2
6^2	33^2	20^2	29^2	4^2	13^2
25^2	7^2	14^2	24^2	31^2	12^2
21^2	32^2	11^2	15^2	22^2	16^2
34^2	18^2	23^2	10^2	19^2	9^2
17^2	8^2	3^2	28^2	27^2	26^2

$$\Sigma = 2551$$

Δέν είναι γνωστό αν υπάρχει μαγικό τετράγωνο τετραγώνων τάξης 3.

Lee Morgenstern (2006): Αν υπάρχει μαγικό τετράγωνο τετραγώνων πραγματικών αριθμών, τάξης 3, θα πρέπει όλοι οι αριθμοί να είναι μεγαλύτεροι του 10^{14} .

Ant Kind (2011): Μονοπαραμετρική οικογένεια ήμιμαγικών τετραγώνων με τετράγωνα αριθμών τάξης 3.

$(2 + 14k + 37k^2 + 42k^3 + 18k^4)^2$	$(-2 - 8k - 7k^2 + 6k^3 + 9k^4)^2$	$(1 + 10k + 29k^2 + 36k^3 + 18k^4)^2$
$(2 + 12k + 29k^2 + 30k^3 + 9k^4)^2$	$(1 + 6k + 19k^2 + 30k^3 + 18k^4)^2$	$(2 + 12k + 29k^2 + 36k^3 + 18k^4)^2$
$(-1 - 2k + 7k^2 + 24k^3 + 18k^4)^2$	$(2 + 16k + 43k^2 + 48k^3 + 18k^4)^2$	$(2 + 10k + 19k^2 + 18k^3 + 9k^4)^2$

Εὐχαριστῶ