

Αγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω



Μπούβαλη Χρυσάνθη
Περδικάτση Βάνα

«Αγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω»

- Η φράση βρισκόταν στην είσοδο της ακαδημίας του Πλάτωνα.
- Σήμερα κοσμεί και άλλες εισόδους!



Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστημίου Coimbra
Πορτογαλία

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- Η γεωμετρία στην αρχαιότητα
- Αρχαίοι έλληνες γεωμέτρες & κάποιες εφαρμογές αυτών σε υπολογισμούς.
- Αξιωματική θεμελίωση της γεωμετρίας. Τα στοιχεία του Ευκλείδη.
- Οι προσπάθειες απόδειξης του 5^{ου} αξιώματος του Ευκλείδη.
- Η δημοσίευση των νέων γεωμετριών.
- Η δικαίωση του Ευκλείδη.

Γεωμετρία στην αρχαιότητα



- Πρακτική ανάγκη για γεωμετρία:
 - Πρακτική ανάγκη μέτρησης της γης.
 - Επίλυση υπολογιστικών προβλημάτων πρακτικής φύσεως, όπως κατασκευές (αρχιτεκτονική), ανάγκη υπολογισμού εμβαδού/όγκων.
 - Αστρονομία.
 - Εμπειρικά αναπτύσσεται από πολλούς αρχαίους πολιτισμούς: Αιγύπτιοι, Βαβυλώνιοι, Κινέζοι, Άραβες.
- Αιγύπτιοι:
 - Πάπυρος Rhind (ο εμπειρισμός τους οδηγεί σε κάποιους σωστούς τύπους (τρίγωνο, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο)– αλλά και κάποιους εσφαλμένους (εμβαδό τυχόντος τετραπλεύρου))
 - Πάπυρος της Μόσχας.
 - (Γνώστες του πυθαγορείου θεωρήματος-απουσίας απόδειξης)
- Βαβυλώνιοι:
 - Πρώτες προσπάθειες για απόδειξη μαθηματικών τύπων (όχι μόνο εμπειρικά).
 - Προχωρημένες αλγεβρικές πράξεις.
 - (Γνώστες του πυθαγορείου θεωρήματος-απουσίας απόδειξης)
- Γέφυρα του εμπειρισμού με την μαθηματική επιστήμη δημιουργούνε πρώτοι οι Έλληνες διαχωρίζοντας τον εμπειρισμό από την απόδειξη (Θαλής-Πυθαγόρας).

Η γεωμετρία στην αρχαία Ελλάδα

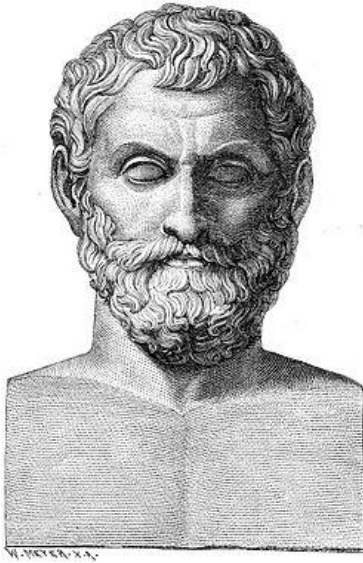
«...οτιδήποτε παραλαμβάνουν οι Έλληνες από τους ξένους, το μετατρέπουν τελικώς σε κάτι καλύτερο»

Πλάτων «Επινομίς»



Ενδεικτικά:

- Πυθαγόρας (Πυθαγόρειοι)
- Εύδοξος ο Κνίδιος
- Αρχιμήδης από τις Συρακούσες
- Αρίσταρχος ο Σάμιος
- Θαλής ο Μιλήσιος
- Ερατοσθένης ο Κυρήνιος
- Ευκλείδης από την Αλεξάνδρεια



Θαλής ο Μιλήσιος

(625-547 π.Χ)

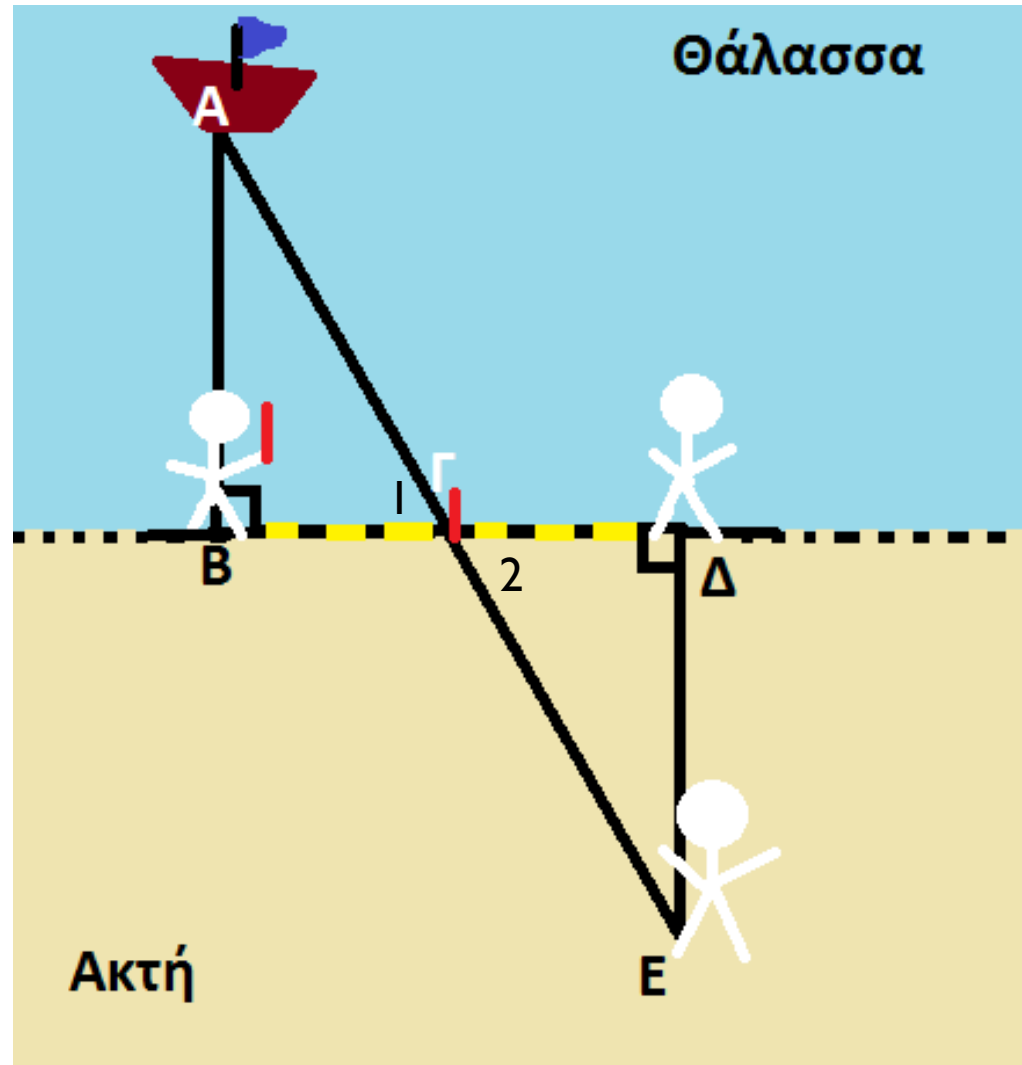
- Ένας εκ των επτά σοφών της αρχαιότητας.
- Μαθηματικός, φυσικός, αστρονόμος, μηχανικός, μετεωρολόγος.
- Ιδρυτής της Ιωνικής Σχολής της φυσικής φιλοσοφίας στη Μίλητο.
- Υπολογίζει με απλή χρήση γεωμετρίας:
 - 1) την απόσταση πλοίου από τη στεριά
 - 2) το ύψος της πυραμίδας του Χέοπα.

Υπολογισμός απόστασης πλοίου από τη στεριά



Υπολογισμός απόστασης πλοίου από τη στεριά

$B\Gamma = \Gamma\Delta$
 $\Gamma_1 = \Gamma_2$
(κατά κορυφήν)



Άρα τα τρίγωνα
ABΓ και EΔΓ
είναι ίσα.

$$AB = E\Delta$$

Υπολογισμός του ύψους της πυραμίδας του Χέοπα



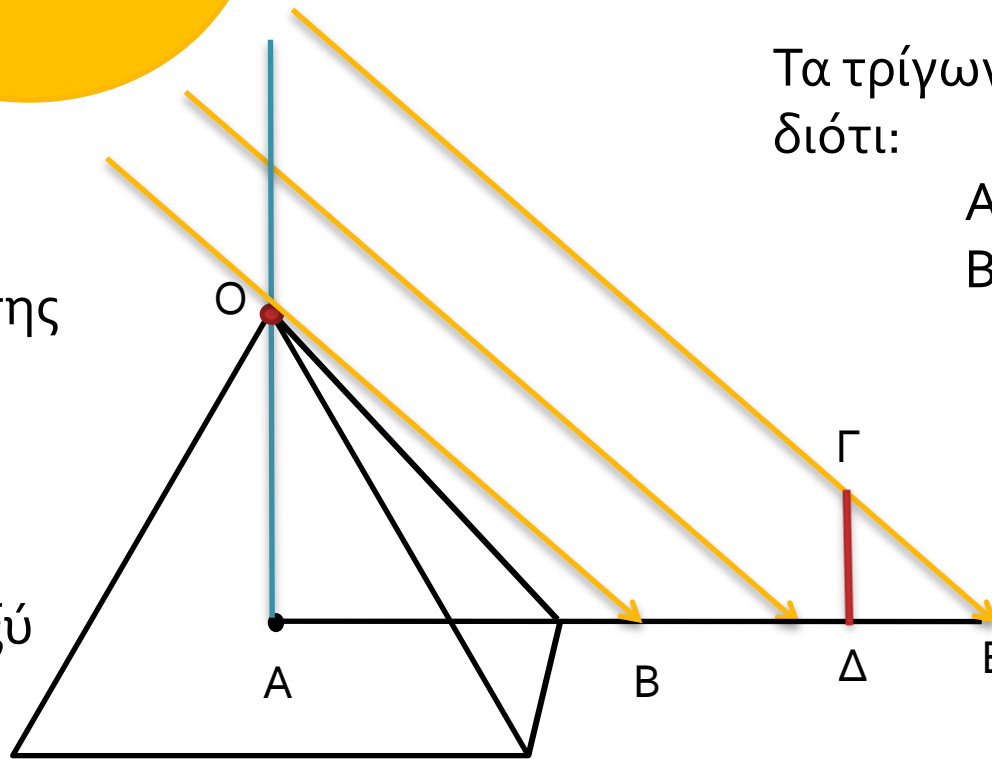
- Είναι η αρχαιότερη και η μεγαλύτερη από τις τρεις πυραμίδες της Γκίζας.
- Είναι το αρχαιότερο από τα επτά θαύματα του κόσμου και το μόνο που σώζεται στις μέρες μας.
- Χτίστηκε ως τάφος σε διάστημα 10-20 χρόνων.

Υπολογισμός του ύψους της πυραμίδας του Χέοπα

Ψάχνουμε το
ΟΑ: ύψος της πυραμίδας
όπου Α είναι το κέντρο της βάσης
της πυραμίδας

Θεωρούμε ότι οι ακτίνες του
ήλιου είναι παράλληλες μεταξύ
τους.

ΓΔ: το ύψος του Θαλή



Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΓΔΕ είναι όμοια
διότι:

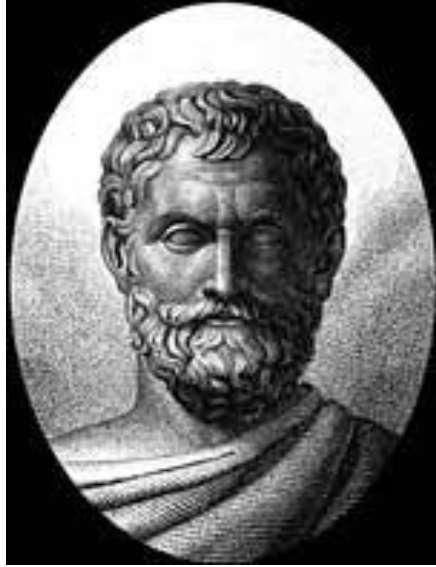
$\angle A = \angle \Delta = 1$ ορθή

$\angle B = \angle E$ ως εντός εκτός κι επί τα αυτά

Άρα λόγω ομοιότητας
τριγώνων, οι λόγοι των
πλευρών θα είναι ίσοι.

Συνεπώς οι πλευρές θα
είναι ανάλογες.

$$\frac{OA}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{\Delta E}$$

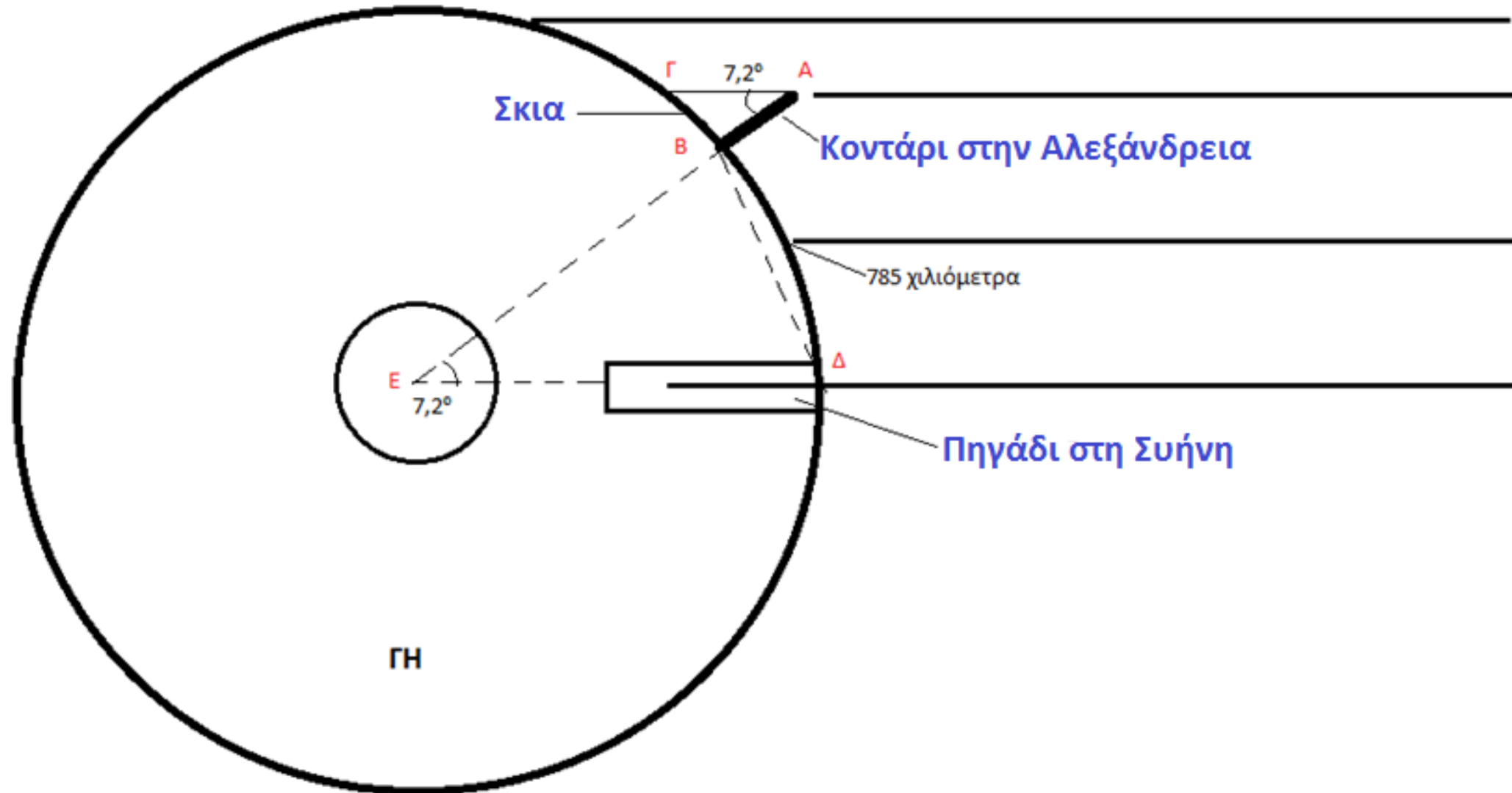


Ερατοσθένης από την Κυρήνεια (276-194 π.Χ.)

- Ποίηση, αστρονομία, ιστορία, μαθηματικά.
- Βιβλιοθηκάριος της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας.
- «Κόσκινο του Ερατοσθένη»
- Υπολογίζει με απλή χρήση γεωμετρίας:
 - Την περιφέρεια της γης

Μέτρηση της περιφέρειας της γης

Παράλληλες ακτίνες από τον ήλιο





Ευκλείδης από την Αλεξάνδρεια (365-300π.Χ.)

- Γνωστά του έργα: Στοιχεία, Τα Δεδομένα, Περί Διαιρέσεων, Φαινόμενα, Οπτικά.
- Συγκεντρώνει την προγενέστερη γνώση, την οποία και αναλύει στο έργο του «Στοιχεία».
 - «Στοιχεία»: 13 βιβλία (ή αλλιώς κεφάλαια)
 - 1-6: Η γεωμετρία του επίπεδου
 - 7-10: Θεωρία αριθμών
 - 11-13: Η γεωμετρία του χώρου
 - Δομή «Στοιχείων»: (Ορισμοί), Αξιώματα, Θεωρήματα (αποδείξεις).
- Από πολλούς ιστορικούς θεωρείται ότι ο Ευκλείδης δίνει κάποιες αρχικές έννοιες:
 - Σημείο είναι αυτό που δεν έχει μέρος.
 - Μια γραμμή έχει μήκος και όχι πλάτος
 - Τα όρια της γραμμής είναι τα σημεία
- Τεράστια συνεισφορά: Αξιοματική θεμελίωση.
(Αξίωμα: προϋπόθεση-πρόταση που γίνεται αποδεκτή σε δεδομένη θεωρία).

Ευκλείδεια Γεωμετρία

Τα αξιώματα του Ευκλείδη

- Από κάθε σημείο και προς κάθε άλλο άγεται μια ευθεία.
- Κάθε ευθεία προεκτείνεται επ'άπειρον.
- Με τυχόν κέντρο και τυχούσα ακτίνα γράφεται κύκλος.
- Όλες οι ορθές γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες.
- Για κάθε σημείο A και κάθε ευθεία (ε) υπάρχει μία το πολύ ευθεία που περιέχει το A και είναι παράλληλη προς την (ε) .

Διατύπωση Ευκλείδη:

Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε το άθροισμα των εντός κι επί τα αυτά γωνιών είναι μικρότερο των δύο ορθών, τότε οι ευθείες τέμνονται προς την πλευρά εκείνη στην οποία το άθροισμα είναι μικρότερο των δύο ορθών.

Η αιτία όλων: Αξίωμα της παραλληλίας

«Για κάθε σημείο A και κάθε ευθεία (ε) υπάρχει μία το πολύ ευθεία που περιέχει το A και είναι παράλληλη προς την (ε).»

- Αμφισβητείται ως αξίωμα για περισσότερο από 2000 χρόνια.
- Δεν υπάρχει αμφιβολία για την εγκυρότητα του Ευκλείδειου αιτήματος, αλλά αμφισβητείται η επιλογή του Ευκλείδη να το τοποθετήσει ανάμεσα στα άλλα αξιώματα. Μήπως ήταν θεώρημα;
- Πάρα πολλοί μαθηματικοί προσπαθούν να το αποδείξουν μέσω των άλλων 4 αξιωμάτων. Ενδεικτικά: Ποσειδώνιος (1^{ος} αιώνας μ.Χ.), Nasireddin (13^{ος} αιώνας), Commandino, Clavio, Cataldi (16^{ος} αιώνας), κ.α. και τελευταίοι πιο σύγχρονοι: Legendre, Saccheri, Lambert, Farkas Bolyai.
- Το πιο συχνό λάθος που κάνουν: μέσα στις αποδείξεις τους χρησιμοποιούν ισοδύναμες προτάσεις με το αξίωμα της παραλληλίας, χωρίς να το καταλάβουν.

Η προσπάθεια απόδειξης του αξιώματος από τον Saccheri



Gerolamo Saccheri (1667-1733)

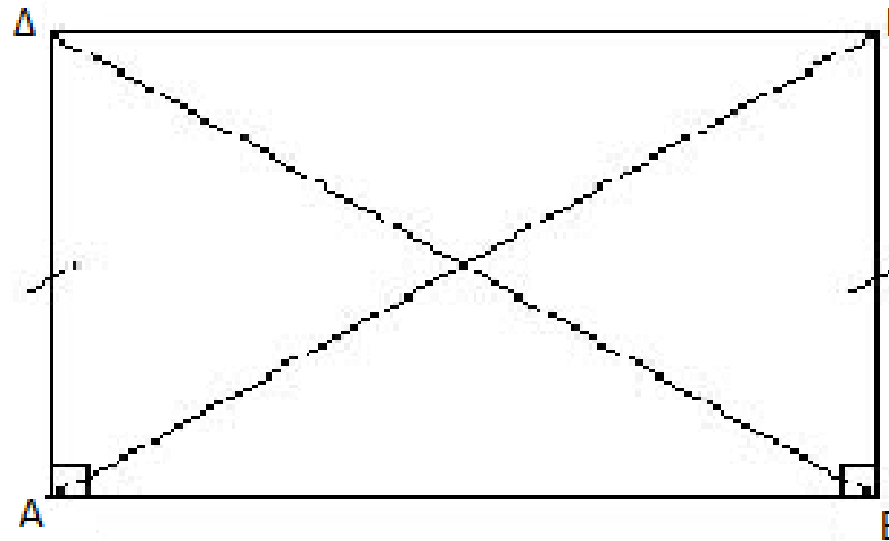
- Ιησουίτης ιερέας
- Καθηγητής μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Πάβια στην Ιταλία.
- Το βιβλίο του «Euclid, Freed of Every Flaw» δημοσιεύτηκε ένα χρόνο μετά τον θάνατό του. Το ονόμασε έτσι επειδή ένιωσε ότι είχε δώσει επιτέλους την πολυπόθητη απόδειξη του 5^{ου} αξιώματος.

Η προσπάθεια απόδειξης του αξιώματος από τον Saccheri

Ο Saccheri διαπιστώνει, ότι το αξίωμα της παραλληλίας συνδέεται ισοδύναμα με το άθροισμα των γωνιών τυχαίου τριγώνου. Μεταφέρει το πρόβλημα, στα τετράπλευρα Saccheri:

Τι είναι το τετράπλευρο Saccheri;

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ καλείται τετράπλευρο Saccheri, αν $AD=BG$ και οι γωνίες στα Α και Β είναι ορθές.



Εύκολα βλέπουμε
ότι:

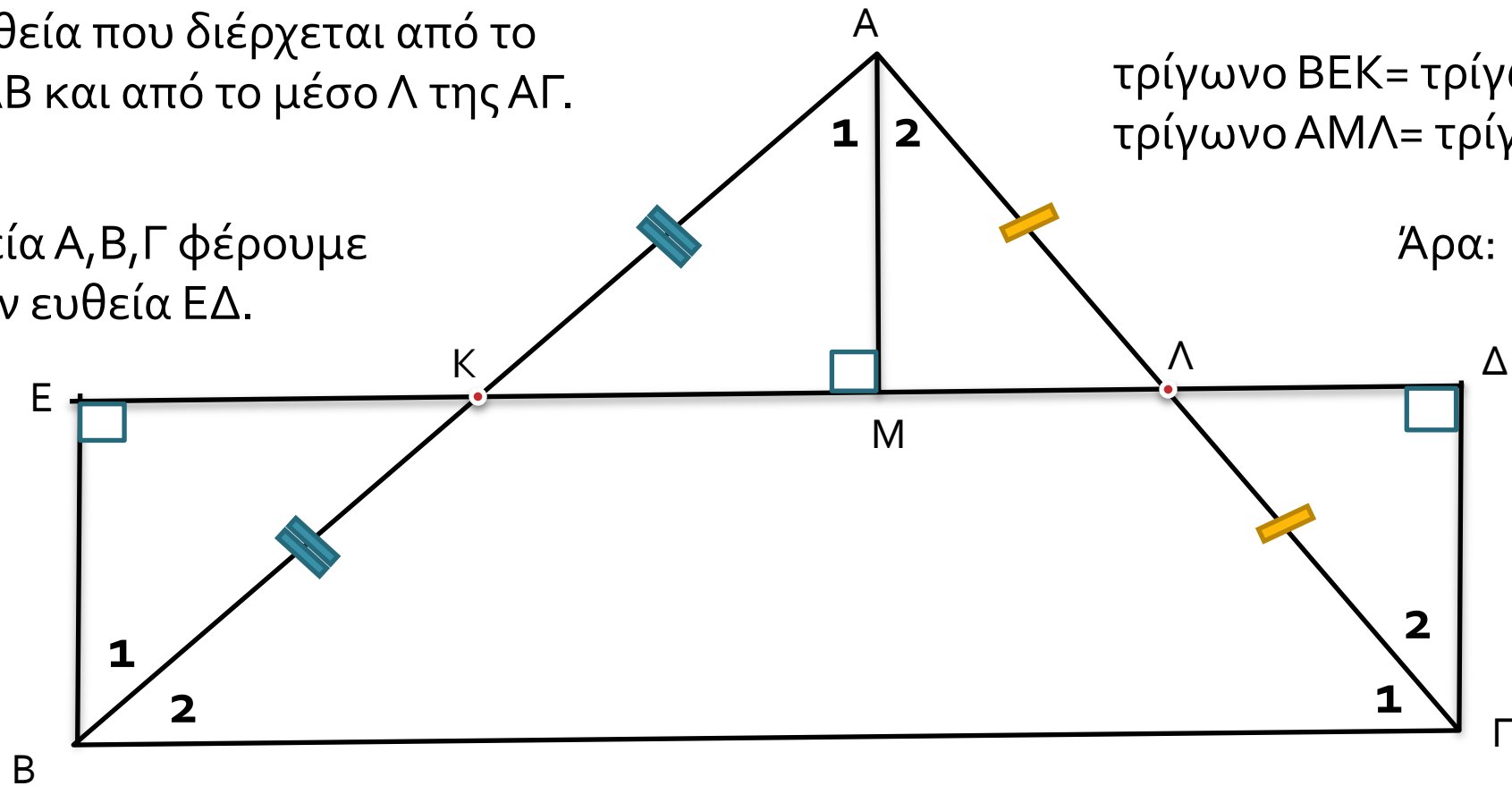
$$\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$$

Παρατήρηση: Ο Saccheri αποδεικνύει ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τυχαίου τριγώνου συνδέεται με το άθροισμα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου.

Θεωρούμε τυχόν τρίγωνο ΑΒΓ.

Φέρουμε ευθεία που διέρχεται από το μέσο Κ της ΑΒ και από το μέσο Λ της ΑΓ.

Από τα σημεία Α,Β,Γ φέρουμε κάθετες στην ευθεία ΕΔ.



Από κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων:

τρίγωνο ΒΕΚ= τρίγωνο ΑΜΚ
τρίγωνο ΑΜΛ= τρίγωνο ΓΔΛ

Άρα: γωνία Β₁=Α₁
γωνία Γ₂=Α₂

Συμπέρασμα:

Το άθροισμα γωνιών του τυχαίου τριγώνου

$A+B_2+\Gamma_1$	$=A_1+A_2+B_2+\Gamma_1$
	$=B_1+\Gamma_2+B_2+\Gamma_1$
	$=B+\Gamma$

του τετραπλεύρου Saccheri ΕΒΓΔ

Η προσπάθεια απόδειξης του αξιώματος από τον Saccheri

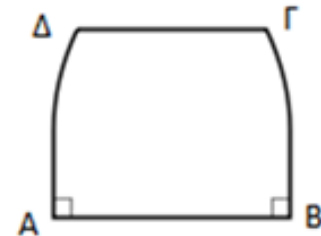
(1) Υπόθεση οξείας γωνίας

Αν οι ίσες γωνίες Δ, Γ στο τετράπλευρο Saccheri είναι οξείες, τότε το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές.



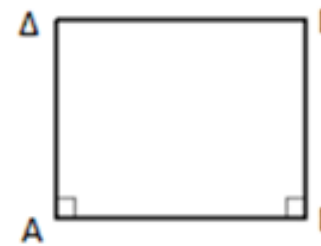
(2) Υπόθεση αμβλείας γωνίας

Αν οι ίσες γωνίες Δ, Γ στο τετράπλευρο Saccheri είναι αμβλείες, τότε το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές.



(3) Υπόθεση ορθής γωνίας

Αν οι ίσες γωνίες Δ, Γ στο τετράπλευρο Saccheri είναι ορθές, τότε το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές.



Η προσπάθεια απόδειξης του αξιώματος από τον Saccheri

Υπόθεση Οξείας
Γωνίας
 $\Gamma = \Delta < 90^\circ$



Άθροισμα γωνιών
τριγώνου
 $< 180^\circ$



Άπειρες παράλληλες
(Υπερβολική)

Υπόθεση Αμβλείας
Γωνίας
 $\Gamma = \Delta > 90^\circ$



Άθροισμα γωνιών
τριγώνου
 $> 180^\circ$



Καμία παράλληλη
(Ελλειπτική)

Υπόθεση Ορθής
Γωνίας
 $\Gamma = \Delta = 90^\circ$



Άθροισμα γωνιών
τριγώνου
 $= 180^\circ$



Μία παράλληλη
(Ευκλείδεια)

Τι απέδειξε τελικά ο Saccheri;

Ο Saccheri απέδειξε ότι σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών είναι το πολύ δύο ορθές. ($\leq 180^\circ$)

Αντίστοιχα, κι άλλοι μαθηματικοί παρουσιάζουν λάθος αποδείξεις.
Κάποιοι από αυτούς είναι: Lambert, Legendre, Farkas Bolyai.



Η προσέγγιση από τον Lambert

Johann Heinrich Lambert

(1728-1777)

- Ελβετός μαθηματικός, φυσικός, αστρονόμος, φιλόσοφος.
- Συνεχίζει το έργο του Saccheri, διατυπώνοντας αντίστοιχες υποθέσεις οξείας/αμβλείας/ορθής γωνίας στο τετράπλευρο Lambert:



- Στη προσπάθειά του για απόδειξη του αξιώματος των παραλλήλων, χρησιμοποιεί και εκείνος ισοδύναμη πρότασή του.
- Το έργο του είναι αυτό που επηρεάζει περισσότερο από κάθε άλλο, τις εξελίξεις στη δημοσίευση των νέων γεωμετριών.



Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

- Ο «πρίγκιπας» των μαθηματικών.
- Ο Gauss καταλήγει στο συμπέρασμα ότι οι προσπάθειες των Saccheri, Lambert, Legendre και του Ούγγρου φίλου του Farkas Bolyai να αποδείξουν το αξίωμα της παραλληλίας είναι μάταιες.
- Είναι δυνατή η ύπαρξη κι άλλων γεωμετριών.
- Δε δημοσιεύει τις ανακαλύψεις του για δύο λόγους
 - α) θέλει να κάνει αυστηρές και ολοκληρωμένες παρουσιάσεις
 - β) για να αποφύγει την αμφισβήτηση, καθώς ήταν βέβαιος ότι δε θα γίνει κατανοητός.



Janos Bolyai (1802-1860)

- Ούγγρος αξιωματικός του στρατού
- Γιός του μαθηματικού Farkas Bolyai
- Και οι δύο ασχολούνται με την μελέτη και τη σημασία του αξιώματος της παραλληλίας
- Ο πατέρας του μόλις έμαθε ότι ο Janos ασχολείται κι αυτός με το 5^ο αξίωμα, του γράφει

«Για όνομα του Θεού, σε ξορκίζω, παράτησέ τα. Να μην τα φοβάσαι λιγότερο από τα σωματικά πάθη γιατί, και αυτά, μπορούν να απορροφήσουν όλο σου τον χρόνο, να σε εξαντλήσουν και να σου στερήσουν τη ζωή»

Ο μικρός Bolyai όμως δεν αλλάζει γνώμη.

Συνεχίζει τις προσπάθειες, και σε αντίθεση με τον Saccheri αντιλαμβάνεται ότι υπάρχει ένα νέο είδος γεωμετρίας τόσο σημαντική όσο και η Ευκλείδεια.

Η δημοσίευση των νέων γεωμετριών

- Ο πατέρας του Janos, αλλάζει στάση και παροτρύνει τον γιο του να συνεχίσει και να προχωρήσει σε δημοσίευση των αποτελεσμάτων του.
- Γράφει το «Απόλυτη Επιστήμη του Χώρου» και το δίνει στον πατέρα του για να το δημοσιεύσει ως παράρτημα του έργου του «*Tentamen*».
- Ο πατέρας του επικοινωνεί κρυφά με Gauss, στον οποίο στέλνει το σύγγραμμα. Ο Gauss στην απάντησή του, επαινεί τον J.Bolyai, αλλά δε συστήνει δημοσίευση. *«Εκπλήσσομαι πολύ που μοιράζομαι αυτή την προσπάθεια, και είμαι εξαιρετικά ευτυχής που συνέβη από τον γιο του παλιού μου φίλου ο οποίος με ξεπερνά με έναν ιδιαίτερο/αξιόλογο τρόπο».*
- Το «*Tentamen*» δημοσιεύεται το 1832 και υπάρχουν ήδη δημοσιεύσεις από το 1829 από τον Lobachevsky.



Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856)

- Ρώσος μαθηματικός, καθηγητής και Πρύτανης στο Πανεπιστήμιο του Καζάν.
- Στις 11 Φεβρουαρίου 1826 παρουσιάζει για πρώτη φορά ένα άρθρο που είχε γράψει, στα γαλλικά, που αναφερόταν στις αρχές της γεωμετρίας συμπεριλαμβανομένης
«une demonstration rigoureuse du theoreme des paralleles»
το οποίο σήμερα έχει χαθεί (1826: τα γενέθλια της νέας γεωμετρίας)
- Το πρώτο του άρθρο «Οι Αρχές της Γεωμετρίας»
(1829, εφημερίδα Kazan Messenger)
Ο 1^{ος} που τολμά να κάνει μια τέτοια δημοσίευση.
- Οι δουλειές των Lobachevsky και Bolyai εκτιμήθηκαν μετά τον θάνατό τους, με τη δημοσίευση του R. Balter το 1867 στο βιβλίο «Elements of Mathematics».

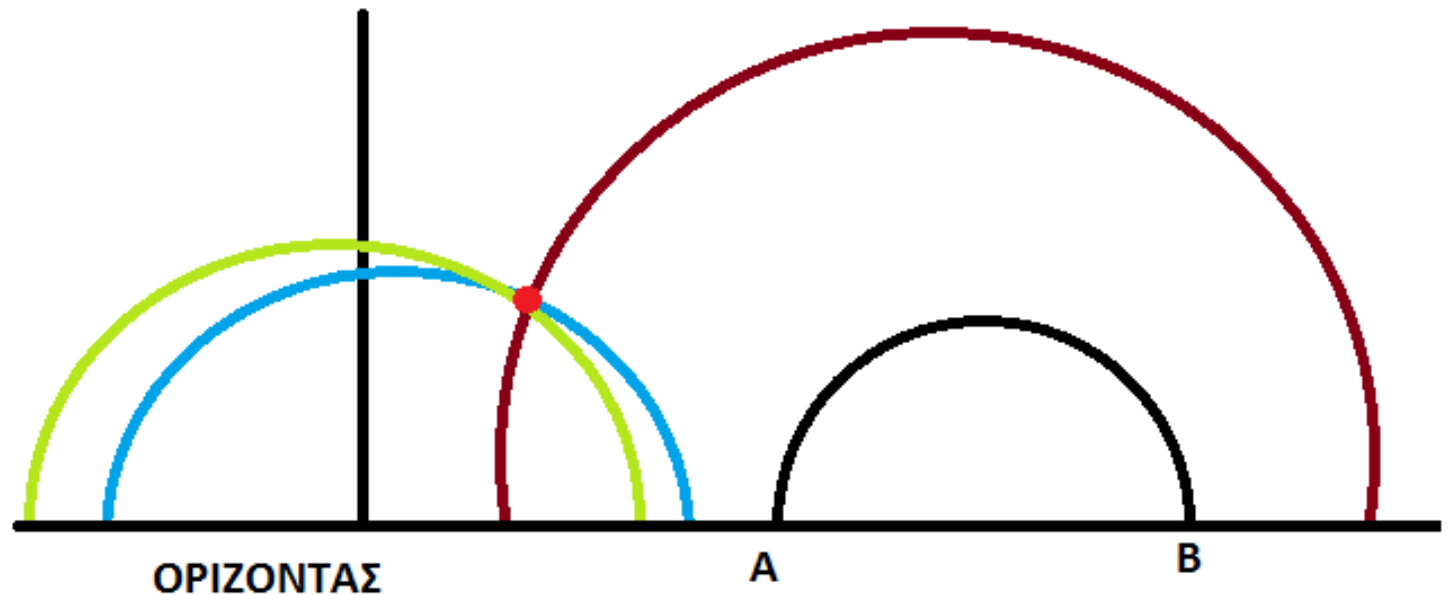
Εμφάνιση νέας γεωμετρίας:

- Τα πρώτα τέσσερα αξιώματα του Ευκλείδη και στη θέση του αξιώματος της παραλληλίας έχουμε το:

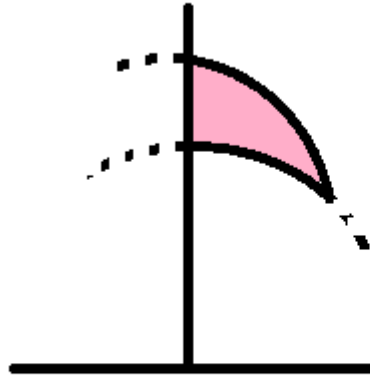
«Υπάρχουν περισσότερες από μία ευθείες που διέρχονται από 1 σημείο παράλληλες σε μια άλλη.»

Ευθείες

- Ενδεικτικά,
το μοντέλο του
άνω ημιεπιπέδου
του Poincare:

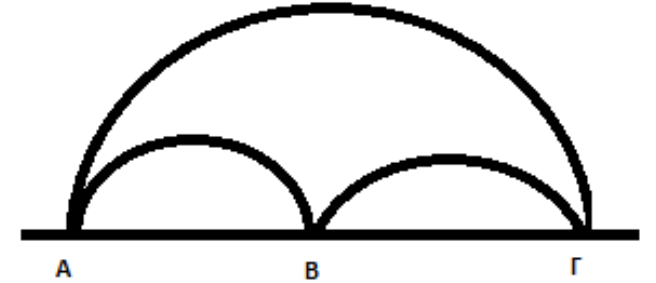


Τρίγωνα στην Υπερβολική Γεωμετρία:



ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ

Ιδεατό Τρίγωνο
(άθροισμα γωνιών
τείνει στο μηδέν).



Κάποιες προτάσεις:

- Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια είναι ίσα.
- Υπάρχουν τρίγωνα που έχουν ίδια βάση, ίδιο ύψος αλλά διαφορετικά εμβαδά.

Εφαρμογή: Θεωρία σχετικότητας.



Bernhard Riemann

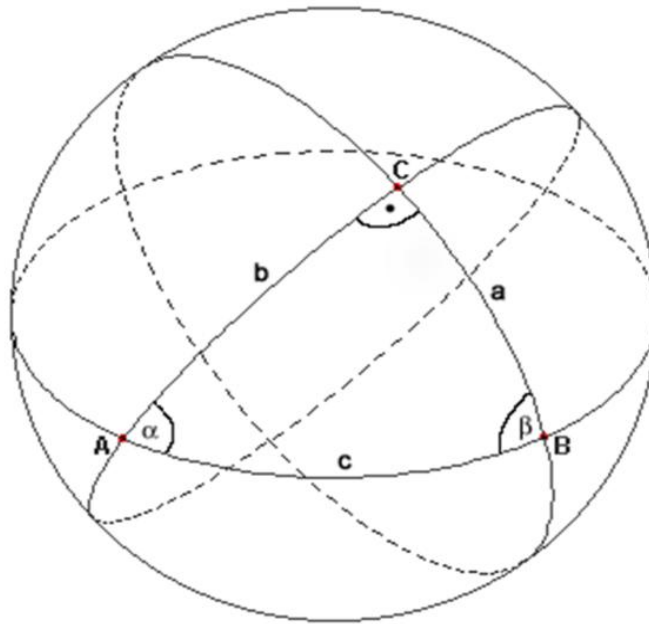
(1826-1866)

- Γερμανός μαθηματικός
- Μαθητής του Gauss.
- Προσπαθεί και συνεχίζει το έργο του Gauss.
- 1859: διορίζεται στο πανεπιστήμιο του Gottingen.
- Παρουσιάζει την Ελλειπτική Γεωμετρία.

Ελλειπτική Γεωμετρία

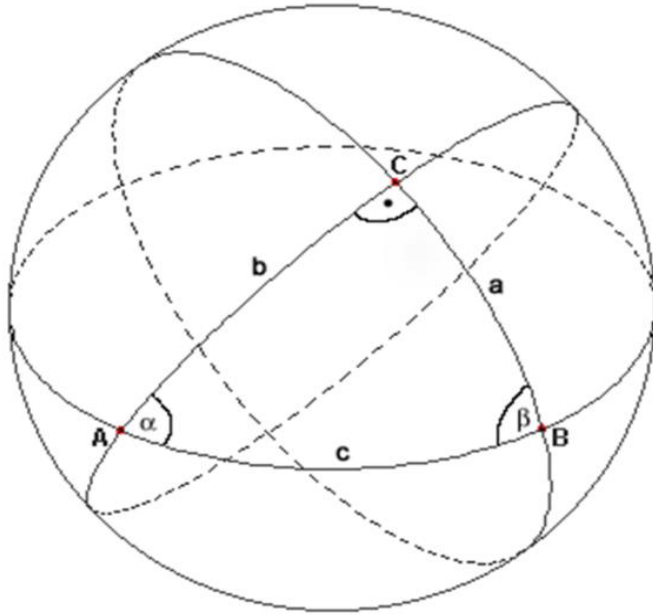
- Στη θέση του αξιώματος της παραλληλίας αντικαθιστούμε το ακόλουθο:

«Από σημείο εκτός ευθείας δεν διέρχεται ευθεία παράλληλη προς αυτή»

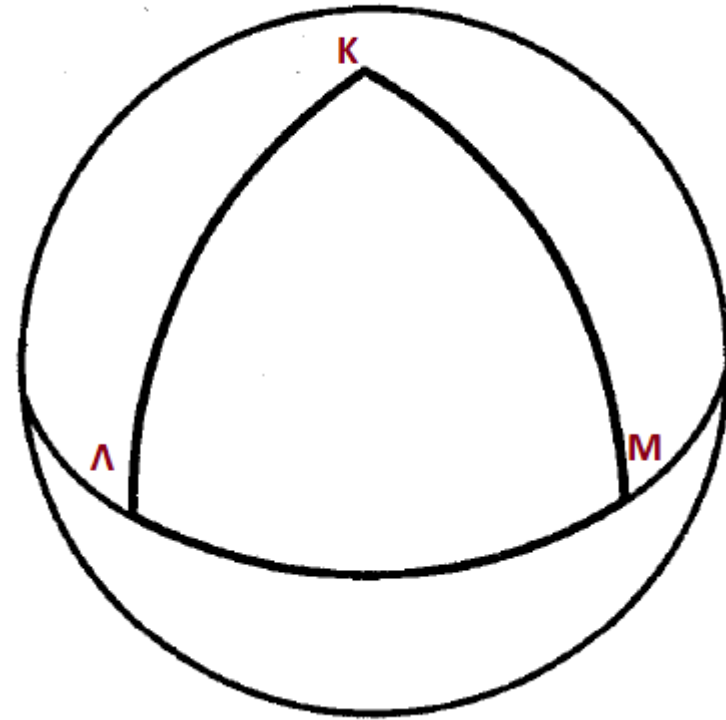


Παρατήρηση: Στην Ελλειπτική Γεωμετρία δεν αλλάζουμε απλώς το Αξίωμα της Παραλληλίας αλλά κάνουμε μια νέα αξιωματική θεμελίωση (επεμβαίνοντας και στα αξιώματα διάταξης).

Ελλειπτική Γεωμετρία



Τρίγωνο ABC



Σφαιρικό Τρίγωνο KLM με
τρεις ορθές γωνίες

Εφαρμογή: Εύρεση γεωγραφικού στίγματος, αποστάσεις ωκεανοπλοΐα, αστρονομία.



David Hilbert

(1862-1943)

- Μαθητής του Heinrich Weber(1842-1913)
- Μετά τον Ευκλείδη, είναι ο πρώτος που επιχειρεί επιτυχημένη αξιωματική θεμελίωση της γεωμετρίας.
- 1898-1899, τότε περίπου παρουσιάζει ένα μικρό βιβλίο «Θεμέλια της Γεωμετρίας».
- Αντί για τα αξιώματα του Ευκλείδη, διατυπώνει μια ομάδα 20 υποθέσεων, γνωστές ως αξιώματα του Hilbert.
 - 1^η ομάδα: Αξιώματα Θέσης
 - 2^η ομάδα: Αξιώματα Διάταξης
 - 3^η ομάδα: Αξιώματα Ισότητας
 - 4^η ομάδα: Αξιώματα Συνέχειας

Η δικαίωση του Ευκλείδη

- Η ανακάλυψη των νέων γεωμετριών, δικαιώνει τον Ευκλείδη στην επιλογή των αξιωμάτων του.
- Η επιλογή αυτή του Ευκλείδη, γίνεται τυχαία;
- Για τον μαθηματικό των Ελληνιστικών χρόνων ήταν προφανές ότι θα μπορούσε να διαμορφωθεί μια συνεπής γεωμετρία στην οποία να μην ισχύει το αξίωμα των παραλλήλων. Και αυτό οφείλεται στην γνώση της Σφαιρικής Γεωμετρίας:
- Η επιστήμη της αστρονομίας, αποτελεί κίνητρο για τους Έλληνες να ασχοληθούν με τη Σφαιρική Γεωμετρία. Έργα των Ελλήνων στη Σφαιρική Γεωμετρία, που φτάνουν στις μέρες μας:
 - ✓ Τα σφαιρικά του Θεοδοσίου (2ος αιώνας π.Χ.)
 - ✓ Τα σφαιρικά του Μενελάου (1ος αιώνας μ.Χ.)
- Εντυπωσιακό και αξιοσημείωτο είναι ότι η Σφαιρική Γεωμετρία προκαλεί τις εξελίξεις στη γεωμετρία 2000 χρόνια αργότερα:
 - ✓ Η σφαιρική γεωμετρία του Μενελάου τυπώνεται για πρώτη φορά το 1758 (μετάφραση στα Λατινικά από Αραβικά και Εβραϊκά χειρόγραφα).
 - ✓ Το έργο του Lambert, δημοσιεύεται το 1766 (Θεωρία Παραλλήλων Γραμμών) (8 χρόνια **αργότερα!!!**) και είναι αυτό που επηρεάζει περισσότερο από κάθε άλλο, τις εξελίξεις στη δημοσίευση των νέων γεωμετριών.
 - ✓ Στο έργο του Lambert, εμφανίζονται προτάσεις που είναι ακριβώς ίδιες με προτάσεις του έργου του Μενελάου. Ενδεικτικά: Το θεώρημα του Lambert σχετικά με την «περίσσεια» του αθροίσματος των γωνιών ενός σφαιρικού τριγώνου εμφανίζεται ως η πρόταση 11 στο πρώτο βιβλίο των Σφαιρικών του Μενελάου!

Ευχαριστούμε