

Δυσεπίλυτα Προβλήματα σε Γραφήματα και Παίγνια



ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΤΖΙΜΑΣ

Δ' ΤΟΜΕΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Δυσεπίλυτα Προβλήματα



- Για ένα πρόβλημα που μας ενδιαφέρει να λύσουμε και είναι **επιλύσιμο**, θα θέλαμε ο αλγόριθμος που θα χρησιμοποιήσουμε για να το λύσουμε να είναι ο «ταχύτερος» από όλους τους δυνατούς αλγορίθμους.

Δυσεπίλυτα Προβλήματα



- Για ένα πρόβλημα που μας ενδιαφέρει να λύσουμε και είναι **επιλύσιμο**, θα θέλαμε ο αλγόριθμος που θα χρησιμοποιήσουμε για να το λύσουμε να είναι ο «ταχύτερος» από όλους τους δυνατούς αλγορίθμους.
- Αντιλαμβανόμαστε ότι η «ταχύτητα» με την οποία επιλύει ο «ταχύτερος» αλγόριθμος το πρόβλημά μας υποδεικνύει το «πόσο δύσκολα» αυτό επιλύεται.

Δυσεπίλυτα Προβλήματα



- Για ένα πρόβλημα που μας ενδιαφέρει να λύσουμε και είναι **επιλύσιμο**, θα θέλαμε ο αλγόριθμος που θα χρησιμοποιήσουμε για να το λύσουμε να είναι ο «ταχύτερος» από όλους τους δυνατούς αλγορίθμους.
- Αντιλαμβανόμαστε ότι η «ταχύτητα» με την οποία επιλύει ο «ταχύτερος» αλγόριθμος το πρόβλημά μας υποδεικνύει το «πόσο δύσκολα» αυτό επιλύεται.
- Χρειαζόμαστε να τυποποιήσουμε την έννοια της «ταχύτητας» αλγορίθμων με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούμε να τους συγκρίνουμε απομονωμένους.

Computational Complexity



- Η (υπολογιστική) πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου είναι το πλήθος των εκτελούμενων στοιχειωδών βημάτων συναρτήσει του μεγέθους της εισόδου του.

Computational Complexity



- Η (υπολογιστική) πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου είναι το πλήθος των εκτελούμενων στοιχειωδών βημάτων συναρτήσει του μεγέθους της εισόδου του.
 - Δηλαδή μια συνάρτηση από τους φυσικούς στους φυσικούς.

Computational Complexity



- Η (υπολογιστική) πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου είναι το πλήθος των εκτελούμενων στοιχειωδών βημάτων συναρτήσει του μεγέθους της εισόδου του.
 - Δηλαδή μια συνάρτηση από τους φυσικούς στους φυσικούς.
- Στο πλαίσιο της Θεωρίας Πολυπλοκότητας, το μέγεθος της εισόδου ενός αλγορίθμου συμβολίζεται (κατά σύμβαση) με το γράμμα n και μια συνάρτηση f ως $f(n)$ (ώστε να είναι ορατές οι μεταβλητές της).

Big O Notation



- Αντιλαμβανόμαστε ότι δεν μας ενδιαφέρει ποιος αλγόριθμος είναι «ταχύτερος» για μικρά μεγέθη της εισόδου αλλά για μεγέθη απροσδιόριστα μεγάλα.

Big O Notation



- Αντιλαμβανόμαστε ότι δεν μας ενδιαφέρει ποιος αλγόριθμος είναι «ταχύτερος» για μικρά μεγέθη της εισόδου αλλά για μεγέθη απροσδιόριστα μεγάλα.
- Για να συγκρίνουμε λοιπόν δύο (ή περισσότερους) αλγορίθμους χρησιμοποιούμε τον λεγόμενο **ασυμπτωτικό συμβολισμό**.

Big O Notation



- Αντιλαμβανόμαστε ότι δεν μας ενδιαφέρει ποιος αλγόριθμος είναι «ταχύτερος» για μικρά μεγέθη της εισόδου αλλά για μεγέθη απροσδιόριστα μεγάλα.
- Για να συγκρίνουμε λοιπόν δύο (ή περισσότερους) αλγορίθμους χρησιμοποιούμε τον λεγόμενο **ασυμπτωτικό συμβολισμό**.
- Λέμε ότι η συνάρτηση $f(n)$ **είναι της τάξης της** $g(n)$ και γράφουμε $f(n) \in O(g(n))$ αν **τελικά** (δηλαδή αν υπάρχει N τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ να ισχύει) $|f(n)| \leq c g(n)$ για κάποια σταθερά c .

P versus NP



- Ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητας **P** (“Polynomial”) αν υπάρχει **αιτιοκρατική Μηχανή Turing** που το επιλύει.

P versus NP



- Ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητας **P** (“Polynomial”) αν υπάρχει **αιτιοκρατική Μηχανή Turing** που το επιλύει.
- Ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητας **NP** (“Non-deterministic Polynomial”) αν υπάρχει **μη-αιτιοκρατική Μηχανή Turing** που το επιλύει.

P versus NP



- Ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητας **P** (“Polynomial”) αν επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητας **NP** (“Non-deterministic Polynomial”) αν υπάρχει μη-αιτιοκρατική Μηχανή Turing που το επιλύει.

P versus NP



- Ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητας **P** (“Polynomial”) αν επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητας **NP** (“Non-deterministic Polynomial”) αν μία πιθανή λύση του ελέγχεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

P versus NP



- Ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητας **P** (“Polynomial”) αν επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητας **NP** (“Non-deterministic Polynomial”) αν μία πιθανή λύση του ελέγχεται σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Παρατήρηση: Η κλάση P είναι υποκλάση της NP.

P versus NP



- Ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητας **P** (“Polynomial”) αν επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητας **NP** (“Non-deterministic Polynomial”) αν μία πιθανή λύση του ελέγχεται σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Παρατήρηση: Η κλάση P είναι υποκλάση της NP.
- Ερώτημα: Είναι η κλάση P γνήσια υποκλάση της NP ή οι δύο αυτές κλάσεις πολυπλοκότητας ταυτίζονται;

P versus NP



- Ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητας **P** (“Polynomial”) αν επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητας **NP** (“Non-deterministic Polynomial”) αν μία πιθανή λύση του ελέγχεται σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Παρατήρηση: Η κλάση P είναι υποκλάση της NP.
- Ερώτημα: Είναι η κλάση P γνήσια υποκλάση της NP ή οι δύο αυτές κλάσεις πολυπλοκότητας ταυτίζονται;
- Απάντηση: Δεν γνωρίζουμε...

NP-hard, NP-complete



- Ένα πρόβλημα A **ανάγεται πολυωνυμικά** σε ένα B αν κάθε στιγμιότυπο του A μετασχηματίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο σε ένα του B τέτοιο ώστε κάθε λύση του στιγμιότυπου του A να αντιστοιχεί σε μία λύση αυτού του B και αντίστροφα.

NP-hard, NP-complete



- Ένα πρόβλημα A **ανάγεται πολυωνυμικά** σε ένα B αν κάθε στιγμιότυπο του A μετασχηματίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο σε ένα του B τέτοιο ώστε κάθε λύση του στιγμιότυπου του A να αντιστοιχεί σε μία λύση αυτού του B και αντίστροφα.
- **Παρατήρηση:** Αν ένα πρόβλημα A ανάγεται πολυωνυμικά σε ένα P πρόβλημα B, είναι κι αυτό P.

NP-hard, NP-complete



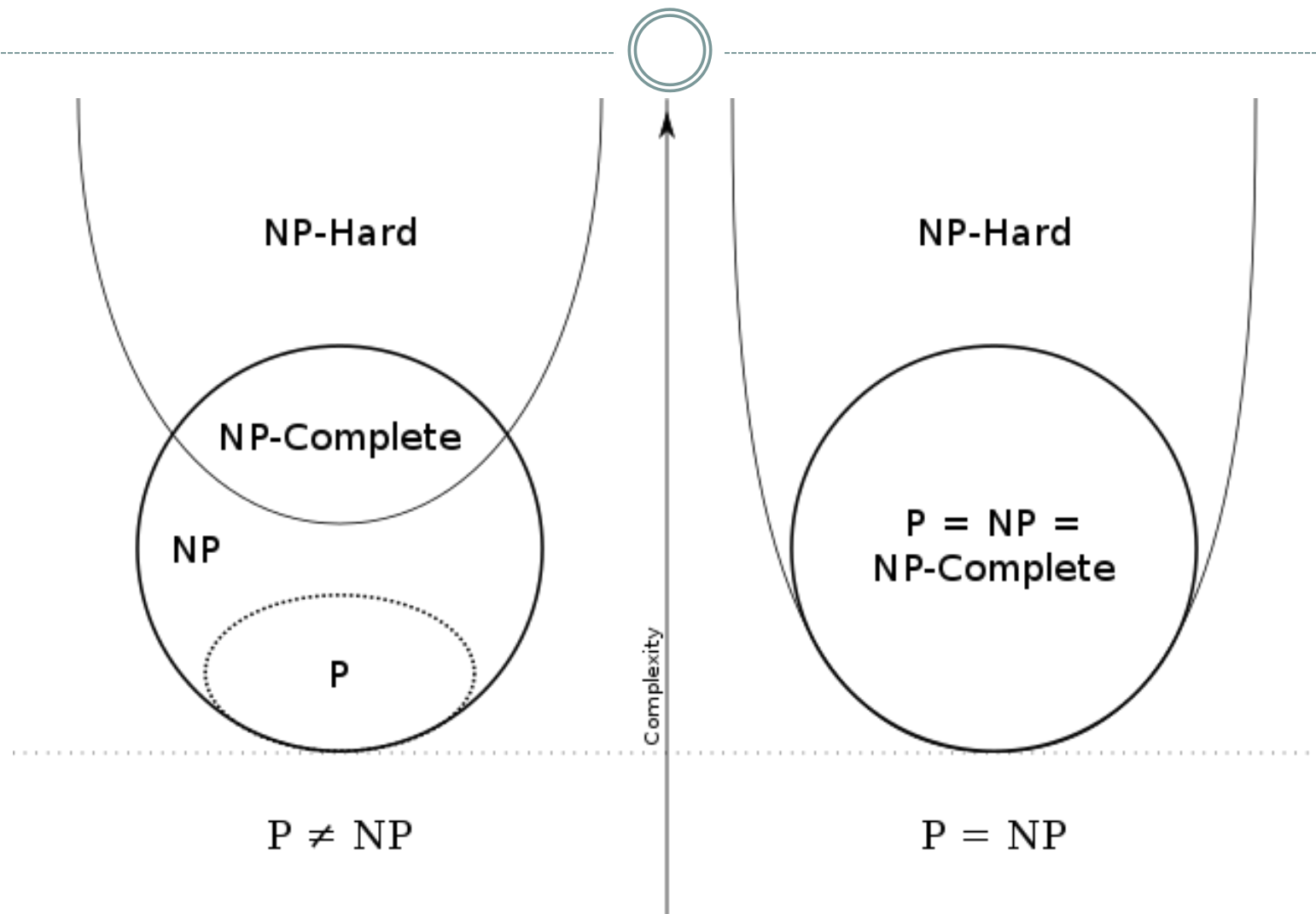
- Ένα πρόβλημα A **ανάγεται πολυωνυμικά** σε ένα B αν κάθε στιγμιότυπο του A μετασχηματίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο σε ένα του B τέτοιο ώστε κάθε λύση του στιγμιότυπου του A να αντιστοιχεί σε μία λύση αυτού του B και αντίστροφα.
- **Παρατήρηση:** Αν ένα πρόβλημα A ανάγεται πολυωνυμικά σε ένα P πρόβλημα B, είναι κι αυτό P.
- Ένα πρόβλημα είναι **NP-δύσκολο** αν **κάθε** NP πρόβλημα ανάγεται πολυωνυμικά σε αυτό.

NP-hard, NP-complete



- Ένα πρόβλημα A **ανάγεται πολυωνυμικά** σε ένα B αν κάθε στιγμιότυπο του A μετασχηματίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο σε ένα του B τέτοιο ώστε κάθε λύση του στιγμιότυπου του A να αντιστοιχεί σε μία λύση αυτού του B και αντίστροφα.
- **Παρατήρηση:** Αν ένα πρόβλημα A ανάγεται πολυωνυμικά σε ένα P πρόβλημα B, είναι κι αυτό P.
- Ένα πρόβλημα είναι **NP-δύσκολο** αν **κάθε** NP πρόβλημα ανάγεται πολυωνυμικά σε αυτό.
- Ένα NP και NP-δύσκολο πρόβλημα είναι **NP-πλήρες**.

P versus NP



Millennium Prize Problems



- Το **2000** το Clay Mathematics Institute επικηρύττει 7 από τα σημαντικότερα ανοικτά προβλήματα των Μαθηματικών για **\$1,000,000** έκαστο.

Millennium Prize Problems



- Το **2000** το Clay Mathematics Institute επικηρύττει 7 από τα σημαντικότερα ανοικτά προβλήματα των Μαθηματικών για **\$1,000,000** έκαστο. Η λίστα του Ινστιτούτου περιλαμβάνει τα ακόλουθα:
 - Ύπαρξη και κενό μάζας των Yang-Mills
 - Υπόθεση του Riemann
 - Το P versus NP
 - Ύπαρξη και ομαλότητα των Navier-Stokes
 - Υπόθεση του Hodge
 - Υπόθεση του Poincare
 - Υπόθεση των Birch και Swinnerton-Dyer

Γραφήματα





Leonhard Euler (1707-1783)

Ελβετός μαθηματικός,
φυσικός, αστρονόμος



Πορτραίτο του Euler
από το 1753



Leonhard Euler (1707-1783)

Ελβετός μαθηματικός,
φυσικός, αστρονόμος



Πορτραίτο του Euler
από το 1753

- Μαθητής του **Johann Bernoulli** (1667-1748), ενός από τους πολλούς διακεκριμένους επιστήμονες της οικογένειας.

Leonhard Euler (1707-1783)

Ελβετός μαθηματικός,
φυσικός, αστρονόμος



Πορτραίτο του Euler
από το 1753

- Μαθητής του **Johann Bernoulli** (1667-1748), ενός από τους πολλούς διακεκριμένους επιστήμονες της οικογένειας.
- Ένας από τους διαπρεπέστερους μαθηματικούς του 18^{ου} αιώνα και ένας από τους παραγωγικότερους στην ιστορία των Μαθηματικών.

Leonhard Euler (1707-1783)

Ελβετός μαθηματικός,
φυσικός, αστρονόμος



Πορτραίτο του Euler
από το 1753

- Μαθητής του **Johann Bernoulli** (1667-1748), ενός από τους πολλούς διακεκριμένους επιστήμονες της οικογένειας.
- Ένας από τους διαπρεπέστερους μαθηματικούς του 18^{ου} αιώνα και ένας από τους παραγωγικότερους στην ιστορία των Μαθηματικών.
- Εισήγαγε και καθιέρωσε ένα μεγάλο μέρος του σύγχρονου συμβολισμού μέσω της πληθώρας των συγγραμμάτων του.

Τύπος του Euler



$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\xRightarrow{\theta=\pi}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Τύπος του Euler



ΣΕ ΕΝΑ ΚΥΡΤΟ ΠΟΛΥΕΔΡΟ ΙΣΧΥΕΙ

$$V - E + F = 2$$

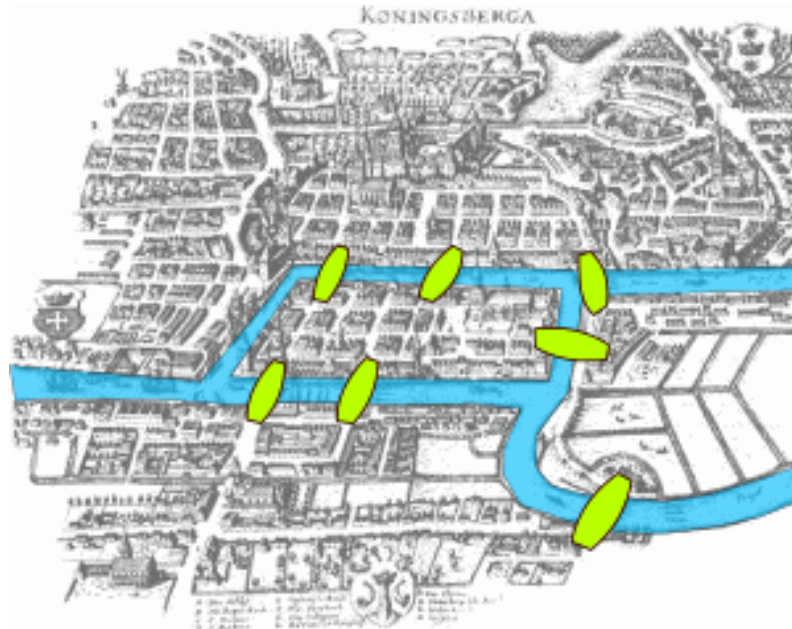
ΟΠΟΥ

V ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΤΩΝ ΚΟΡΥΦΩΝ,
E ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΤΩΝ ΑΚΜΩΝ ΚΑΙ
F ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ
ΤΟΥ ΠΟΛΥΕΔΡΟΥ

Οι Επτά Γέφυρες του Königsberg



- Το **Königsberg** της Πρωσίας (σημερινό **Kaliningrad** της Ρωσίας) είναι κτισμένο εκατέρωθεν ενός ποταμού συμπεριλαμβανομένων και δύο μεγάλων νησιών όπως φαίνεται στη εικόνα που ακολουθεί:



Οι Επτά Γέφυρες του Königsberg



- Ο Euler αναλαμβάνει να λύσει το εξής πρόβλημα:
Πώς μπορούμε να περιηγηθούμε στο Königsberg

Οι Επτά Γέφυρες του Königsberg



- Ο Euler αναλαμβάνει να λύσει το εξής πρόβλημα:
Πώς μπορούμε να περιηγηθούμε στο Königsberg
 - περνώντας την κάθε γέφυρα ακριβώς μία φορά και

Οι Επτά Γέφυρες του Königsberg



- Ο Euler αναλαμβάνει να λύσει το εξής πρόβλημα:
Πώς μπορούμε να περιηγηθούμε στο Königsberg
 - περνώντας την κάθε γέφυρα **ακριβώς** μία φορά και
 - τερματίζοντας εκεί απ' όπου ξεκινήσαμε;

Οι Επτά Γέφυρες του Königsberg



- Ο Euler αναλαμβάνει να λύσει το εξής πρόβλημα:
Πώς μπορούμε να περιηγηθούμε στο Königsberg
 - περνώντας την κάθε γέφυρα **ακριβώς** μία φορά και
 - τερματίζοντας εκεί απ' όπου ξεκινήσαμε;
- Ο Euler αντιλαμβάνεται πως το πως κινούμαστε για να πάμε από τη μία γέφυρα στην επόμενη δεν έχει σημασία για τη λύση του προβλήματος.

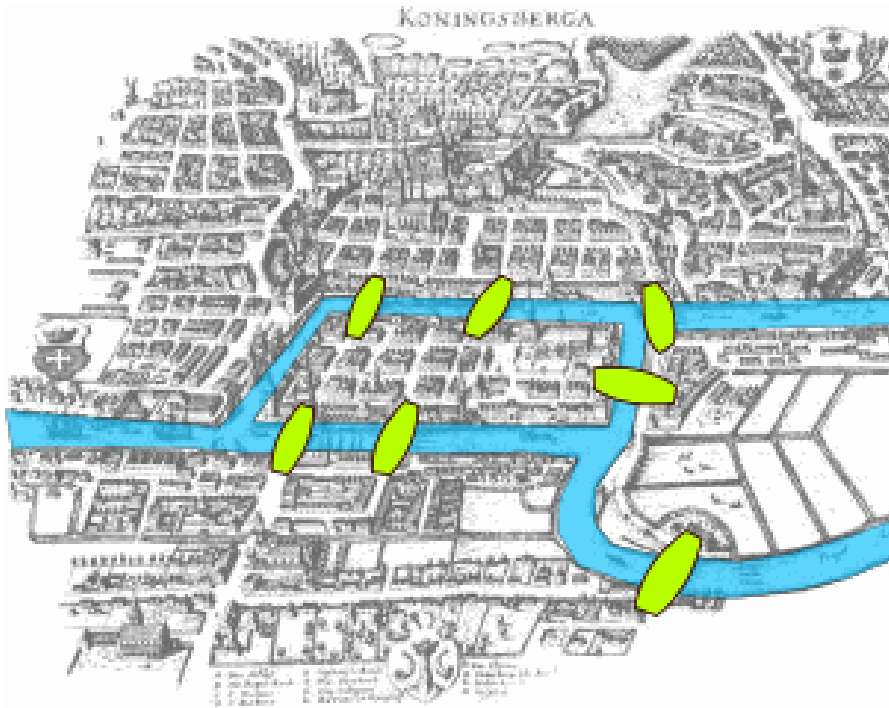
Οι Επτά Γέφυρες του Königsberg



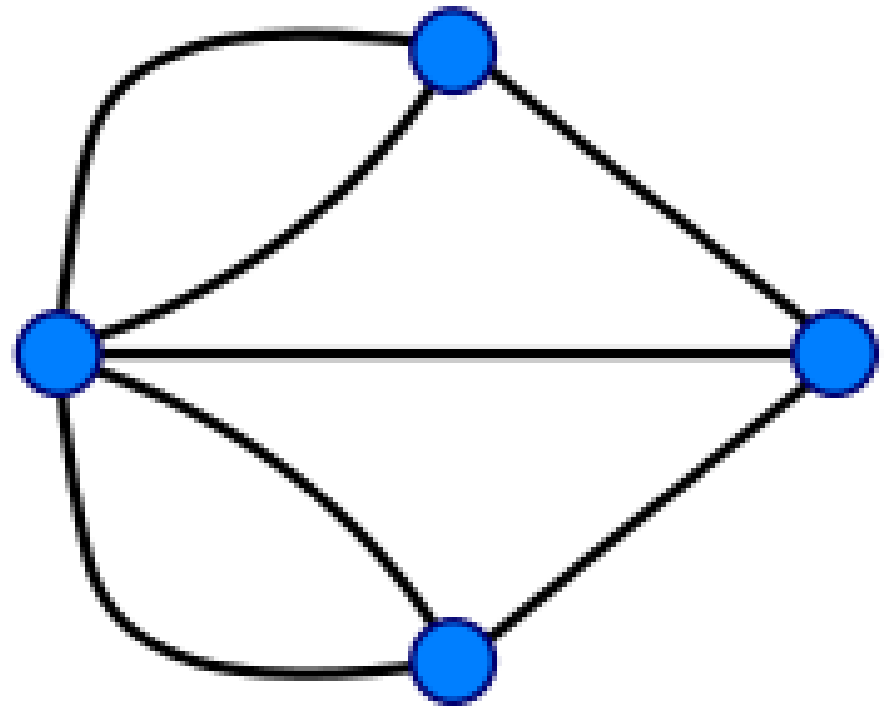
- Ο Euler αναλαμβάνει να λύσει το εξής πρόβλημα:
Πώς μπορούμε να περιηγηθούμε στο Königsberg
 - περνώντας την κάθε γέφυρα **ακριβώς** μία φορά και
 - τερματίζοντας εκεί απ' όπου ξεκινήσαμε;
- Ο Euler αντιλαμβάνεται πως το πως κινούμαστε για να πάμε από τη μία γέφυρα στην επόμενη δεν έχει σημασία για τη λύση του προβλήματος.
- Οδηγείται έτσι σε μία αφαίρεση του Königsberg όπου τα τμήματα ξηράς εκφυλίζονται σε σημεία και μήκος και μορφή των γεφυρών μάς είναι αδιάφορα.

Οι Επτά Γέφυρες του Königsberg

Ο χάρτης του Königsberg:



Το γράφημα του Euler:



Γραφήματα



- **Γράφημα** είναι κάθε δυάδα συνόλων $G = (V, E)$ τέτοια ώστε τα στοιχεία του E να είναι σύνολα που περιέχουν **ακριβώς δύο** στοιχεία του V .

Γραφήματα



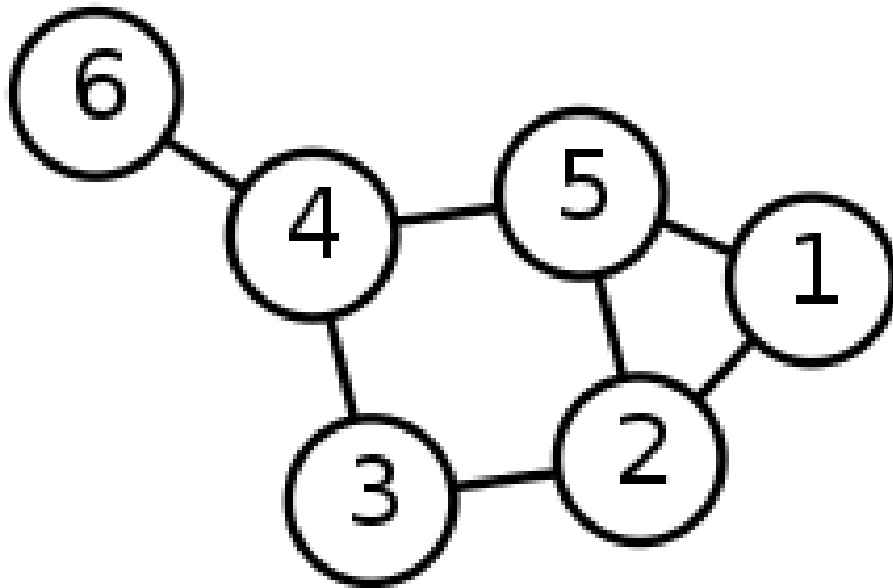
- **Γράφημα** είναι κάθε δυάδα συνόλων $G = (V, E)$ τέτοια ώστε τα στοιχεία του E να είναι σύνολα που περιέχουν **ακριβώς δύο** στοιχεία του V .
 - Τα στοιχεία του V καλούνται **κορυφές (vertices)** και αναπαριστώνται ως σημεία στο επίπεδο.

Γραφήματα



- **Γράφημα** είναι κάθε δυάδα συνόλων $G = (V, E)$ τέτοια ώστε τα στοιχεία του E να είναι σύνολα που περιέχουν **ακριβώς δύο** στοιχεία του V .
 - Τα στοιχεία του V καλούνται **κορυφές (vertices)** και αναπαριστώνται ως σημεία στο επίπεδο.
 - Τα στοιχεία του E καλούνται **ακμές (edges)** και αναπαριστώνται ως ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τις κορυφές που περιέχουν.

Γραφήματα



- Κορυφές:

- 1, 2, 3, 4, 5, 6

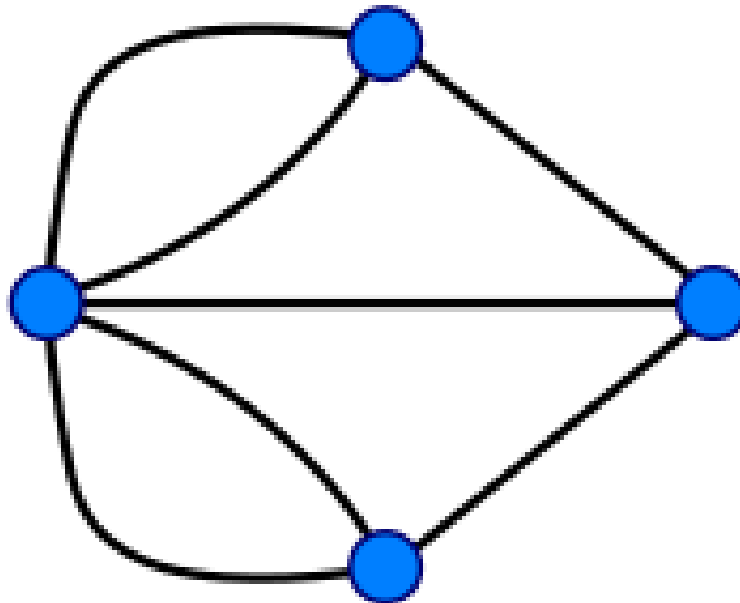
- Ακμές:

- $\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}$

Οι Επτά Γέφυρες του Königsberg



- Ο Euler παρατήρησε ότι για να έχει ένα γράφημα μία περιήγηση όπως αυτή που ζητά το πρόβλημα των γεφυρών των Königsberg θα πρέπει κάθε κορυφή του να αποτελεί άκρο **άρτιου πλήθους** ακμών.



Οι Επτά Γέφυρες του Königsberg



- Ο Euler παρατήρησε ότι για να έχει ένα γράφημα μία περιήγηση όπως αυτή που ζητά το πρόβλημα των γεφυρών των Königsberg θα πρέπει κάθε κορυφή του να αποτελεί άκρο **άρτιου πλήθους** ακμών.
- Στο γράφημα του Euler για το Königsberg κάθε κορυφή αποτελεί άκρο **περιττού πλήθους** ακμών.

Οι Επτά Γέφυρες του Königsberg



- Ο Euler παρατήρησε ότι για να έχει ένα γράφημα μία περιήγηση όπως αυτή που ζητά το πρόβλημα των γεφυρών των Königsberg θα πρέπει κάθε κορυφή του να αποτελεί άκρο **άρτιου πλήθους** ακμών.
- Στο γράφημα του Euler για το Königsberg κάθε κορυφή αποτελεί άκρο **περιττού πλήθους** ακμών.
- Ο Euler συμπεραίνει πως **ΔΕΝ** υπάρχει περιήγηση του Königsberg με τις ζητούμενες ιδιότητες.

Οι Επτά Γέφυρες του Königsberg



- Ο Euler παρατήρησε ότι για να έχει ένα γράφημα μία περιήγηση όπως αυτή που ζητά το πρόβλημα των γεφυρών των Königsberg θα πρέπει κάθε κορυφή του να αποτελεί άκρο **άρτιου πλήθους** ακμών.
- Στο γράφημα του Euler για το Königsberg κάθε κορυφή αποτελεί άκρο **περιττού πλήθους** ακμών.
- Ο Euler συμπεραίνει πως **ΔΕΝ** υπάρχει περιήγηση του Königsberg με τις ζητούμενες ιδιότητες.
- Οι περιηγήσεις της μορφής που ζητά το πρόβλημα που είδαμε ονομάζονται σήμερα **περιηγήσεις Euler**.



Sir William Hamilton (1805-1865)

Ιρλανδός μαθηματικός,
φυσικός, αστρονόμος





Sir William Hamilton (1805-1865)

Ιρλανδός μαθηματικός,
φυσικός, αστρονόμος



- Απόφοιτος του Trinity College του Δουβλίνου, στο οποίο διορίστηκε Καθηγητής Αστρονομίας το **1827**.



Sir William Hamilton (1805-1865)

Ιρλανδός μαθηματικός,
φυσικός, αστρονόμος



- Απόφοιτος του Trinity College του Δουβλίνου, στο οποίο διορίστηκε Καθηγητής Αστρονομίας το **1827**.
- Μετακομίζει στο Παρατηρητήριο του Πανεπιστημίου στο Dunsink, όπου παραμένει για το υπόλοιπο της ζωής του.



Sir William Hamilton (1805-1865)

Ιρλανδός μαθηματικός,
φυσικός, αστρονόμος



- Απόφοιτος του Trinity College του Δουβλίνου, στο οποίο διορίστηκε Καθηγητής Αστρονομίας το **1827**.
- Μετακομίζει στο Παρατηρητήριο του Πανεπιστημίου στο Dunsink, όπου παραμένει για το υπόλοιπο της ζωής του.
- Είναι περισσότερο γνωστός για:
 - τον εκ νέου φορμαλισμό της Νευτώνειας Μηχανικής που φέρει το όνομα του στη **Φυσική** και

Sir William Hamilton (1805-1865)

Ιρλανδός μαθηματικός,
φυσικός, αστρονόμος



- Απόφοιτος του Trinity College του Δουβλίνου, στο οποίο διορίστηκε Καθηγητής Αστρονομίας το **1827**.
- Μετακομίζει στο Παρατηρητήριο του Πανεπιστημίου στο Dunsink, όπου παραμένει για το υπόλοιπο της ζωής του.
- Είναι περισσότερο γνωστός για:
 - τον εκ νέου σχηματισμό της Νευτώνειας Μηχανικής που φέρει το όνομα του **στη Φυσική** και
 - την ανακάλυψη των τετραδονίων (quaternions) **στα Μαθηματικά**.



Sir William Hamilton (1805-1865)

Ιρλανδός μαθηματικός,
φυσικός, αστρονόμος



- Το **1857** επινοεί (και κυκλοφορεί εμπορικὰ) το ακόλουθο παιχνίδι: Μπορούμε να περιηγηθούμε ένα **δωδεκάεδρο** (κινούμενοι μόνο πάνω στις ακμές του)



Sir William Hamilton (1805-1865)

Ιρλανδός μαθηματικός,
φυσικός, αστρονόμος



- Το **1857** επινοεί (και κυκλοφορεί εμπορικὰ) το ακόλουθο παιχνίδι: Μπορούμε να περιηγηθούμε ένα **δωδεκάεδρο** (κινούμενοι μόνο πάνω στις ακμές του)
 - επισκεπτόμενοι την κάθε κορυφή **ακριβώς** μία φορά και



Sir William Hamilton (1805-1865)

Ιρλανδός μαθηματικός,
φυσικός, αστρονόμος



- Το **1857** επινοεί (και κυκλοφορεί εμπορικὰ) το ακόλουθο παιχνίδι: Μπορούμε να περιηγηθούμε ένα **δωδεκάεδρο** (κινούμενοι μόνο πάνω στις ακμές του)
 - επισκεπτόμενοι την κάθε κορυφή **ακριβώς** μία φορά και
 - τερματίζοντας εκεί απ' όπου ξεκινήσαμε;



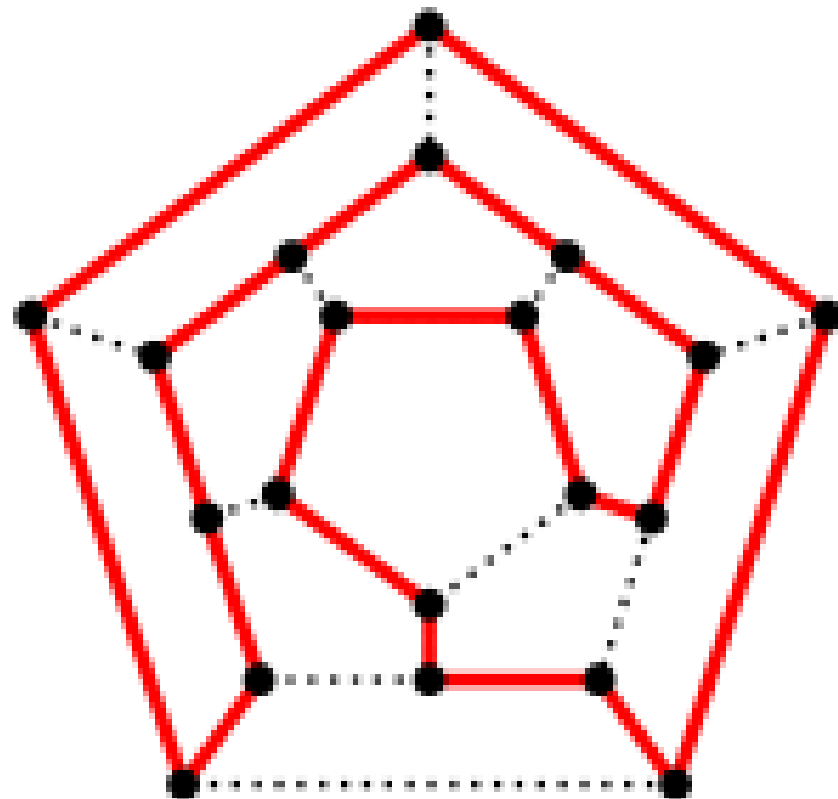
Sir William Hamilton (1805-1865)

Ιρλανδός μαθηματικός,
φυσικός, αστρονόμος



- Το **1857** επινοεί (και κυκλοφορεί εμπορικὰ) το ακόλουθο παιχνίδι: Μπορούμε να περιηγηθούμε ένα **δωδεκάεδρο** (κινούμενοι μόνο πάνω στις ακμές του)
 - επισκεπτόμενοι την κάθε κορυφή **ακριβώς** μία φορά και
 - τερματίζοντας εκεί απ' όπου ξεκινήσαμε;
- Οι περιηγήσεις της παραπάνω μορφής ονομάζονται σήμερα **περιηγήσεις Hamilton**.

Το Παιχνίδι του Hamilton



Travelling Salesman Problem (TSP)



ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

**ΠΟΥ ΝΑ ΔΕΧΕΤΑΙ ΩΣ ΕΙΣΟΔΟ
ΕΝΑ ΓΡΑΦΗΜΑ**

**ΚΑΙ ΝΑ ΕΠΙΣΤΡΕΦΕΙ ΩΣ ΕΞΟΔΟ
ΜΙΑ ΠΕΡΙΗΓΗΣΗ HAMILTON
ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ
(ΕΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ)**

Το Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή



- Όπως υποδεικνύει και το όνομά του, το **Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή** μπορεί να ειπωθεί ως το πρόβλημα του να βρεθεί ο γρηγορότερος τρόπος να επισκεφθεί ένας πωλητής όλους τους υποψήφιους πελάτες του και να επιστρέψει εκεί που ξεκίνησε.

Το Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή



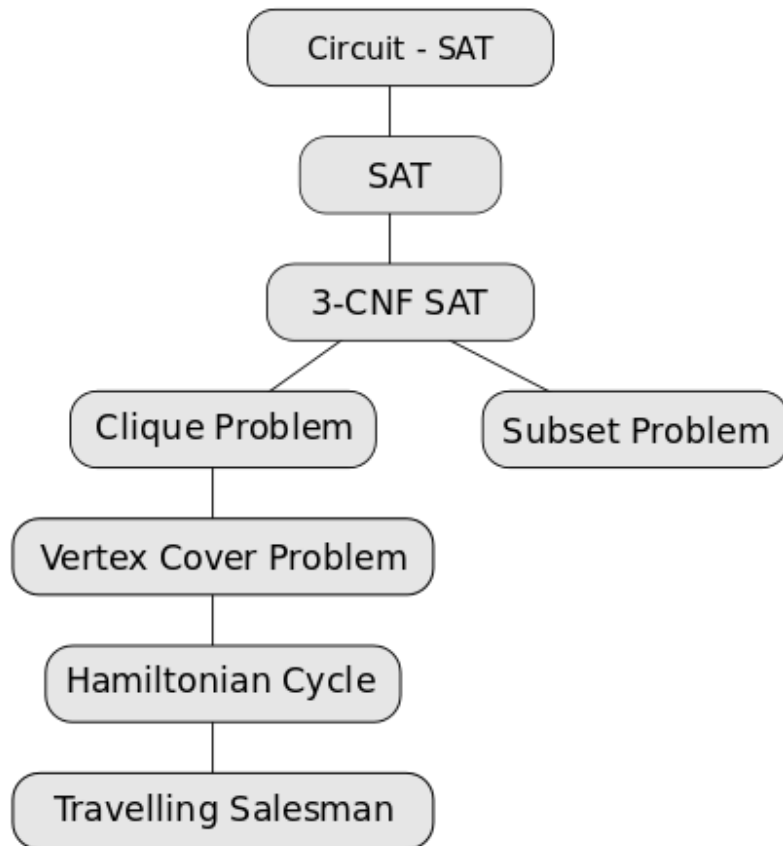
- Όπως υποδεικνύει και το όνομά του, το **Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή** μπορεί να ειπωθεί ως το πρόβλημα του να βρεθεί ο γρηγορότερος τρόπος να επισκεφθεί ένας πωλητής όλους τους υποψήφιους πελάτες του και να επιστρέψει εκεί που ξεκίνησε.
- Αν και μαθηματικά διατυπωμένο ήδη από τον Hamilton, πρωτοαντιμετωπίζεται μαθηματικά την δεκαετία του **1930**.

Το Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή



- Όπως υποδεικνύει και το όνομά του, το **Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή** μπορεί να ειπωθεί ως το πρόβλημα του να βρεθεί ο γρηγορότερος τρόπος να επισκεφθεί ένας πωλητής όλους τους υποψήφιους πελάτες του και να επιστρέψει εκεί που ξεκίνησε.
- Αν και μαθηματικά διατυπωμένο ήδη από τον Hamilton, πρωτοαντιμετωπίζεται μαθηματικά την δεκαετία του **1930**.
- Σε αντίθεση με το πρόβλημα εύρεσης περιήγησης Euler, το TSP είναι ένα **NP-πλήρες** πρόβλημα.

Το Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή



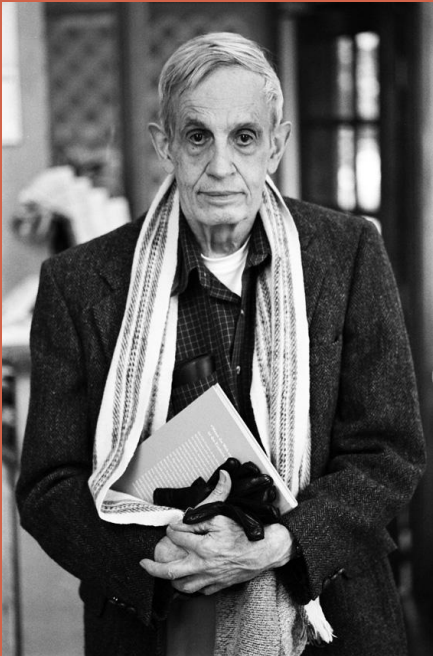
- Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται οι πολυωνυμικές αναγωγές που ανάγουν το **πρωταρχικό** NP-πλήρες Πρόβλημα Ικανοποίησης Κυκλώματος (Circuit Satisfiability) στο TSP.

Παίγνια



John Nash (1928-2015)

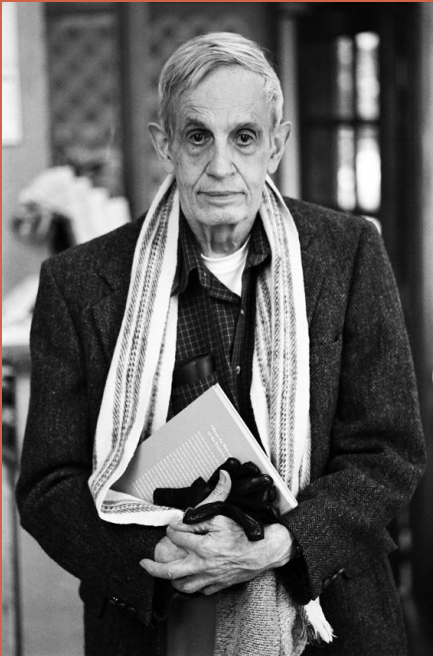
Αμερικανός
μαθηματικός



Ο Nash το 2006.

John Nash (1928-2015)

Αμερικανός
μαθηματικός

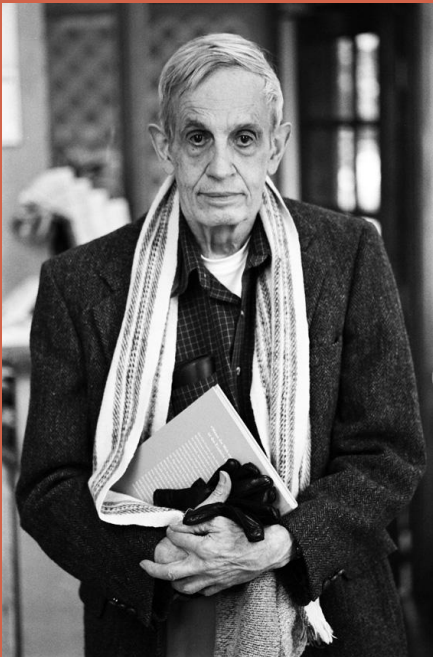


Ο Nash το 2006.

- Το **1948** (σε ηλικία 19 χρονών) αποφοιτεί από το μετέπειτα Carnegie Mellon University έχοντας λάβει πτυχίο και μεταπτυχιακό στα Μαθηματικά.

John Nash (1928-2015)

Αμερικανός
μαθηματικός

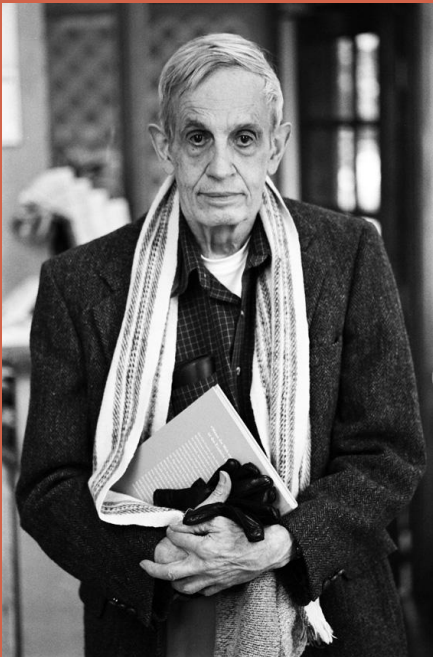


Ο Nash το 2006.

- Το **1948** (σε ηλικία 19 χρονών) αποφοιτεί από το μετέπειτα Carnegie Mellon University έχοντας λάβει πτυχίο και μεταπτυχιακό στα Μαθηματικά.
- Το **1950** λαμβάνει το διδακτορικό του από το Πανεπιστήμιο του Princeton για την 28 σελίδων διατριβή του πάνω στα **μη-συνεργατικά παίγνια**,

John Nash (1928-2015)

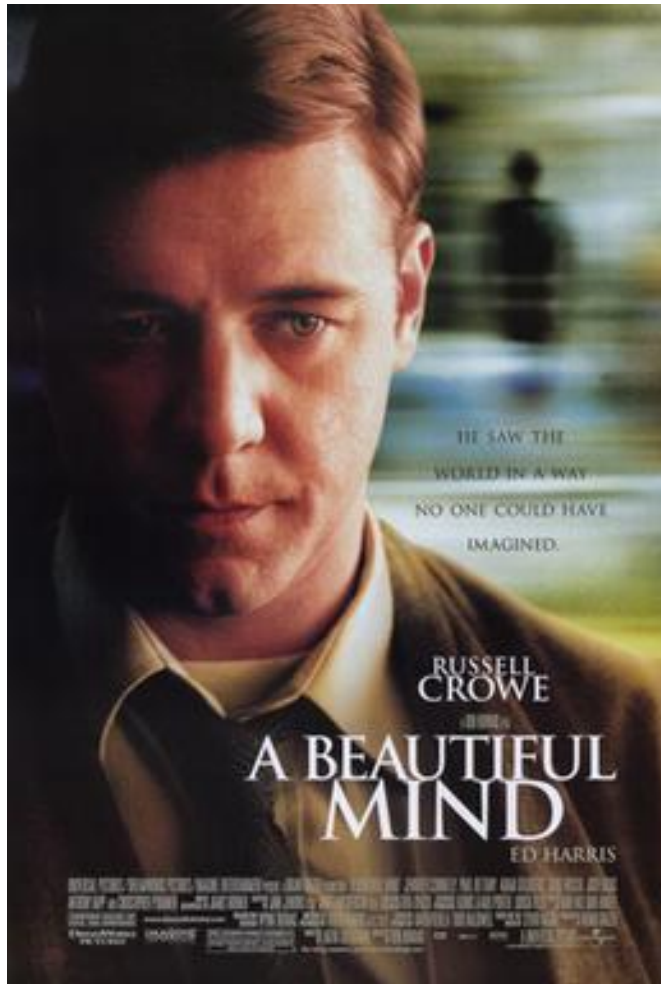
Αμερικανός
μαθηματικός



Ο Nash το 2006.

- Το **1948** (σε ηλικία 19 χρονών) αποφοιτεί από το μετέπειτα Carnegie Mellon University έχοντας λάβει πτυχίο και μεταπτυχιακό στα Μαθηματικά.
- Το **1950** λαμβάνει το διδακτορικό του από το Πανεπιστήμιο του Princeton για την 28 σελίδων διατριβή του πάνω στα μη-συνεργατικά παίγνια,
 - στην οποία εισήγαγε την ισορροπία του που τώρα ονομάζεται **ισορροπία Nash** (Nash equilibrium).

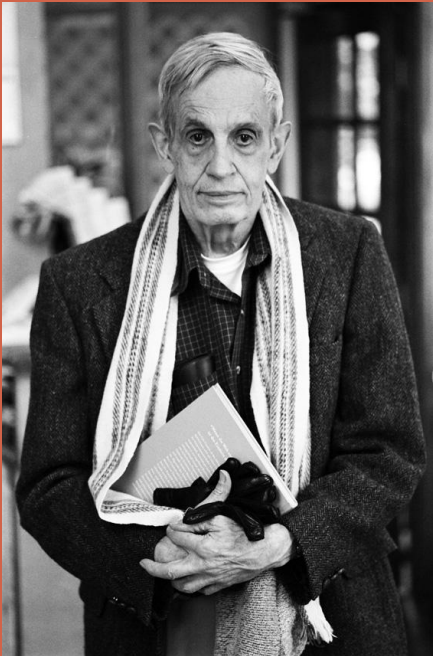
Ο John Nash στον Κινηματογράφο



- A Beautiful Mind
 - Έτος Κυκλοφορίας: 2001
 - Είδος: Βιογραφικό Δράμα

John Nash (1928-2015)

Αμερικανός
μαθηματικός

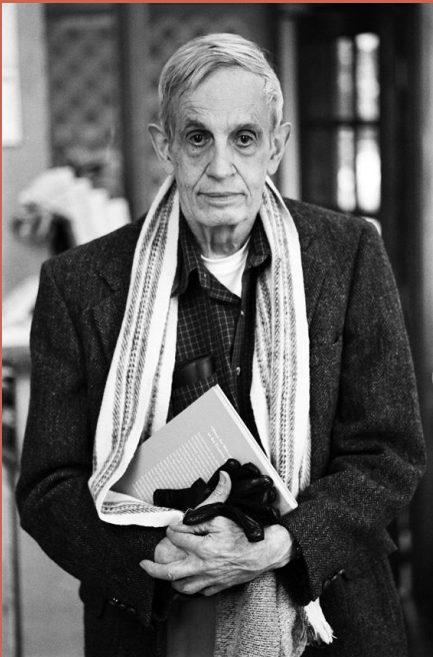


Ο Nash το 2006.

- Το **1959** του διαγιγνώσκεται παρανοϊκή σχιζοφρένεια που χαρακτηρίζεται από παρανοϊκές πεποιθήσεις και συχνά αντίληψη μη-υπαρκτών υπο-/αντικειμένων.

John Nash (1928-2015)

Αμερικανός
μαθηματικός

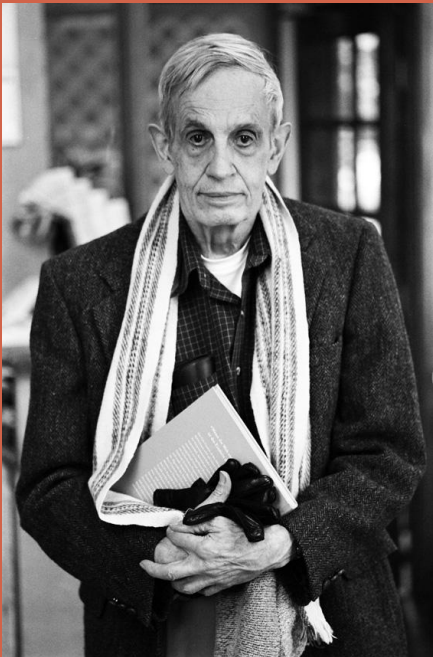


Ο Nash το 2006.

- Το **1959** του διαγιγνώσκεται παρανοϊκή σχιζοφρένεια που χαρακτηρίζεται από παρανοϊκές πεποιθήσεις και συχνά αντίληψη μη-υπαρκτών υπο-/αντικειμένων.
- Το **1994** του απονέμεται το Nobel Οικονομικών για το έργο του στη **Θεωρία Παιγνίων**.

John Nash (1928-2015)

Αμερικανός
μαθηματικός



Ο Nash το 2006.

- Το **1959** του διαγιγνώσκεται παρανοϊκή σχιζοφρένεια που χαρακτηρίζεται από παρανοϊκές πεποιθήσεις και συχνά αντίληψη μη-υπαρκτών υπο-/αντικειμένων.
- Το **1994** του απονέμεται το Nobel Οικονομικών για το έργο του στη **Θεωρία Παιγνίων**.
- Το **2015** του απονέμεται το Abel για τη συνεισφορά του στη θεωρία των **μη-γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων**.

Παίγνια



- Μη αρνητικό ακέραιο πλήθος **παικτών**.

Παίγνια



- Μη αρνητικό ακέραιο πλήθος **παικτών**.
 - Ένα παίγνιο μπορεί να μην έχει παίκτες!

Παίγνια



- Μη αρνητικό ακέραιο πλήθος **παικτών**.
 - Ένα παίγνιο μπορεί να μην έχει παίκτες!
- Κάθε παίκτης έχει
 - μερική ή ολική **(τέλεια) πληροφόρηση** της κατάστασης του παιγνίου,

Παίγνια



- Μη αρνητικό ακέραιο πλήθος **παικτών**.
 - Ένα παίγνιο μπορεί να μην έχει παίκτες!
- Κάθε παίκτης έχει
 - μερική ή ολική (**τέλεια**) **πληροφόρηση** της κατάστασης του παιγνίου,
 - έναν αριθμό από δυνατές ενέργειες (actions) που ονομάζονται **αμιγείς στρατηγικές (pure strategies)** και

Παίγνια



- Μη αρνητικό ακέραιο πλήθος **παικτών**.
 - Ένα παίγνιο μπορεί να μην έχει παίκτες!
- Κάθε παίκτης έχει
 - μερική ή ολική (**τέλεια**) **πληροφόρηση** της κατάστασης του παιγνίου,
 - έναν αριθμό από δυνατές ενέργειες (actions) που ονομάζονται **αμιγείς στρατηγικές** (pure strategies) και
 - ένα μέτρο της **χρησιμότητας** (utility) που έχει για αυτόν το κάθε πιθανό αποτέλεσμα του παιγνίου.

Παίγνια



- Μη αρνητικό ακέραιο πλήθος **παικτών**.
 - Ένα παίγνιο μπορεί να μην έχει παίκτες!
- Κάθε παίκτης έχει
 - μερική ή ολική (**τέλεια**) **πληροφόρηση** της κατάστασης του παιγνίου,
 - έναν αριθμό από δυνατές ενέργειες (actions) που ονομάζονται **αμιγείς στρατηγικές** (pure strategies) και
 - ένα μέτρο της **χρησιμότητας** (utility) που έχει για αυτόν το κάθε πιθανό αποτέλεσμα του παιγνίου.
- Ανάλογα το παίγνιο, οι παίκτες μπορεί να ενεργούν είτε ταυτόχρονα είτε με κάποια σειρά.

Ισορροπία Nash



- Μία πλειάδα που στην i -οστή θέση έχει μία από τις στρατηγικές του i -οστού παίκτη ονομάζεται **προφίλ στρατηγικών**.

Ισορροπία Nash



- Μία πλειάδα που στην i -οστή θέση έχει μία από τις στρατηγικές του i -οστού παίκτη ονομάζεται **προφίλ στρατηγικών**.
- **Ισορροπία Nash** είναι κάθε προφίλ στρατηγικών τέτοιο ώστε να μην υπάρχει για κάποιον παίκτη ένα άλλο προφίλ που να διαφέρει μόνο στη δική του στρατηγική και να το προτιμά.

Ισορροπία Nash



- Ως παίκτες θα μπορούσαμε αντί να έχουμε μόνο μία αμιγή στρατηγική να έχουμε κάθε μία μα με κάποια πιθανότητα (έτσι ώστε οι πιθανότητες να αθροίζουν στη μονάδα). Αυτή ονομάζεται **μεικτή στρατηγική**.

Ισορροπία Nash

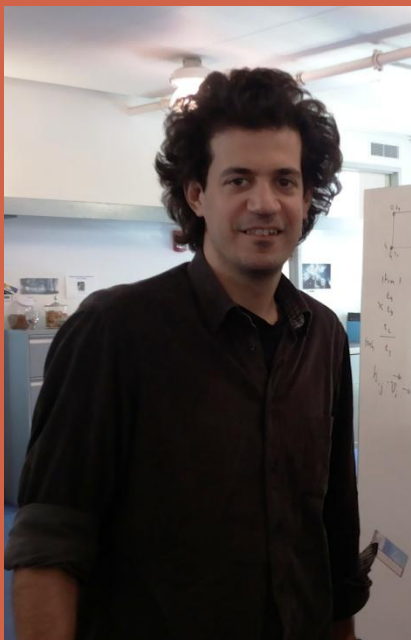


- Ως παίκτες θα μπορούσαμε αντί να έχουμε μόνο μία αμιγή στρατηγική να έχουμε κάθε μία μα με κάποια πιθανότητα (έτσι ώστε οι πιθανότητες να αθροίζουν στη μονάδα). Αυτή ονομάζεται **μεικτή στρατηγική**.
- Ο Nash έδειξε στη διδακτορική διατριβή του ότι **κάθε** παίγνιο έχει ισορροπία Nash, αν επιτρέψουμε οι στρατηγικές των παικτών να είναι μεικτές.



Κωνσταντίνος Δασκαλάκης (1981-)

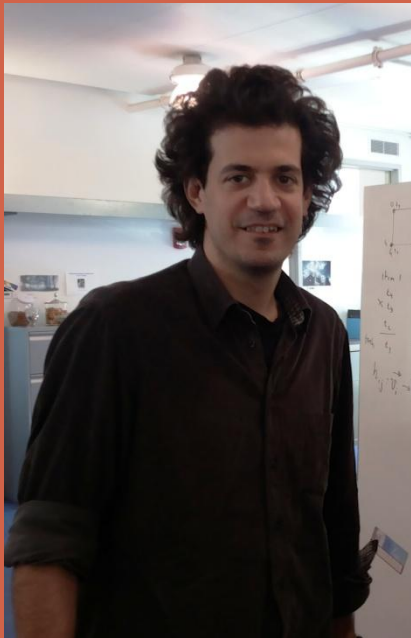
Έλληνας επιστήμονας
των υπολογιστών





Κωνσταντίνος Δασκαλάκης (1981-)

Έλληνας επιστήμονας
των υπολογιστών

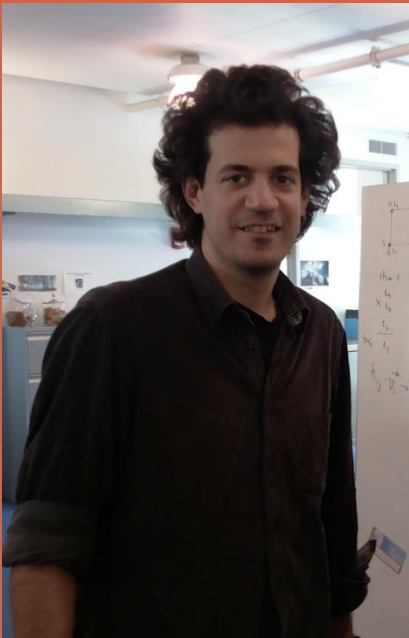


- Το **2004** έλαβε το πτυχίο του ηλεκτρολόγου μηχανικού και μηχανικού υπολογιστών από το Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.



Κωνσταντίνος Δασκαλάκης (1981-)

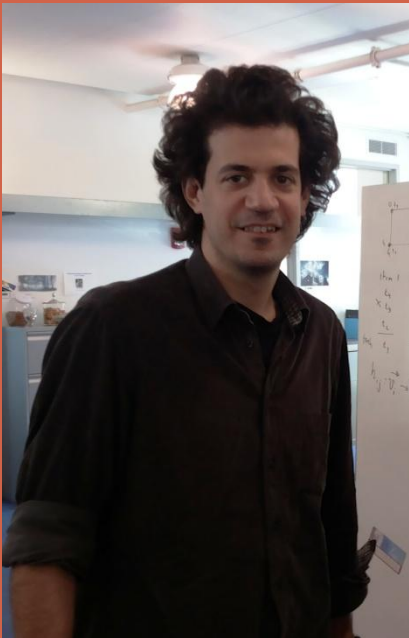
Έλληνας επιστήμονας
των υπολογιστών



- Το **2004** έλαβε το πτυχίο του ηλεκτρολόγου μηχανικού και μηχανικού υπολογιστών από το Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Το **2008** έλαβε το διδακτορικό του από το Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνια στο Μπέρκλεϋ για την διατριβή του πάνω στην πολυπλοκότητα του υπολογισμού της ισορροπίας Nash.

Κωνσταντίνος Δασκαλάκης (1981-)

Έλληνας επιστήμονας
των υπολογιστών



- Το **2004** έλαβε το πτυχίο του ηλεκτρολόγου μηχανικού και μηχανικού υπολογιστών από το Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Το **2008** έλαβε το διδακτορικό του από το Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνια στο Μπέρκλεϋ για την διατριβή του πάνω στην πολυπλοκότητα του υπολογισμού της ισορροπίας Nash.
- Είναι καθηγητής του MIT από το **2009**.

Πολυπλοκότητα και Ισορροπία Nash



- Η κλάση πολυπλοκότητας **PPAD** είναι μία υποκλάση της **FNP** (“Function Non-deterministic Polynomial”), του αναλόγου της NP για **προβλήματα συνάρτησης**.

Πολυπλοκότητα και Ισορροπία Nash



- Η κλάση πολυπλοκότητας **PPAD** είναι μία υποκλάση της **FNP** (“Function Non-deterministic Polynomial”), του αναλόγου της NP για **προβλήματα συνάρτησης**.
- Σε δημοσίευσή τους στο STOC **2006** οι Δασκαλάκης και άλλοι αποδεικνύουν ότι **ο υπολογισμός** μίας ισορροπίας Nash ενός παιγνίου 2 παικτών είναι **PPAD-πλήρης**.

Πολυπλοκότητα και Ισορροπία Nash



- Η κλάση πολυπλοκότητας **PPAD** είναι μία υποκλάση της **FNP** (“Function Non-deterministic Polynomial”), του αναλόγου της NP για **προβλήματα συνάρτησης**.
- Σε δημοσίευσή τους στο STOC **2006** οι Δασκαλάκης και άλλοι αποδεικνύουν ότι **ο υπολογισμός** μίας ισορροπίας Nash ενός παιγνίου 2 παικτών είναι **PPAD-πλήρης**.
- Σε δημοσίευσή του στο SODA **2011** ο Δασκαλάκης αποδεικνύει ότι **η προσέγγιση** μίας ισορροπίας Nash ενός παιγνίου 2 παικτών είναι κι αυτή **PPAD-πλήρης**.

Βιβλιογραφία



- Το υλικό αυτής της ομιλίας αντλήθηκε από τις ακόλουθες εγγραφές τις Αγγλικής Wikipedia.
 - Big O notation
 - Constantinos Daskalakis
 - Game theory
 - Graph theory
 - Icosian game
 - Johann Bernoulli
 - John Forbes Nash Jr.
 - Leonhard Euler
 - Millenium Prize Problems

Βιβλιογραφία



- Το υλικό αυτής της ομιλίας αντλήθηκε από τις ακόλουθες εγγραφές τις Αγγλικής Wikipedia.
 - Nash equilibrium
 - NP-completeness
 - Seven Bridges of Königsberg
 - Travelling salesman problem
 - William Rowan Hamilton

Βιβλιογραφία



- Οι εργασίες του Δασκαλάκη που αναφέρθηκαν είναι διαθέσιμες από την προσωπική του ιστοσελίδα <http://people.csail.mit.edu/costis/> και είναι οι ακόλουθες:
 1. Constantinos Daskalakis, Paul W. Goldberg and Christos H. Papadimitriou: *The Complexity of Computing a Nash Equilibrium*. SIAM Journal on Computing, 39(1), 195--259, May 2009. **Special issue for STOC 2006. Invited.**
 2. Constantinos Daskalakis: *On the Complexity of Approximating a Nash Equilibrium*. ACM Transactions on Algorithms (TALG), 9(3): 23, 2013. **Special Issue for SODA 2011. Invited.**

ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ