

N

E

V

E

R

Y

W

H

E

R

E

N

D

O

C

A

L

S

F

R

A

C

T

A

L

S

E

V

E

R

Y

W

H

E

R

E

N

D

O

C

A

L

S

F

R

A

C

T

A

L

S

E

V

E

R

Y

W

H

E

R

E

N

D

O

C

A

L

S

F

R

A

C

T

A

L

S

E

V

E

R

Y

W

H

E

R

E

N

D

O

C

A

L

S

F

R

A

C

T

A

L

S

E

V

E

R

Y

W

H

E

R

E

N

D

O

C

A

L

S

F

R

A

C

T

A

L

S

E

V

E

R

Y

W

H

E

R

E

N

D

O

C

A

L

S

F

R

A

C

T

A

L

S

E

V

E

R

Y

W

H

E

R

E

N

D

O

C

A

L

S

F

R

A

C

T

A

L

S

E

V

E

R

Y

W

H

E

R

E

N

D

O

C

A

L

S

F

R

A

C

T

A

L

S

E

V

E

R

Y

W

H

E

R

E

N

D

O

C

A

L

S

F

R

A

C

T

A

L

S

E

V

E

R

Y

W

H

E

R

E

N

D

O

C

A

L

S

F

R

A

C

T

A

L

S

E

V

E

R

Y

W

H

E

R

E

N

D

O

C

A

L

S

F

R

A

C

T

A

L

S

E

V

E

R

Y

W

H

E

R

E

N

D

O

C

A

L

S

F

R

A

C

T

A

L

S

E

V

E

R

Y

W

H

E

R

E

N

D

O

C

A

L

S

F

R

A

C

T

A

L

S

E

V

E

R

Y

W

H

E

R

E

N

D

O

C

A

L

S

F

R

A

C

T

A

L

S

E

V

E

R

Y

W

H

E

R

E

N

D

O

C

A

L

S

F

R

A

C

T

A

L

S

E

V

E

R

Y

W

H

E

R

E

N

D

O

C

A

L

S

F

R

A

C

T

A

L

S

E

V

E

R

Y

W

H

E

R

E

N

D

O

C

A

L

S

F

R

A

C

T

A

L

S

E

V

E

R

Y

W

H

E

R

E

N

D

O

C

A

L

S

F

R

A

C

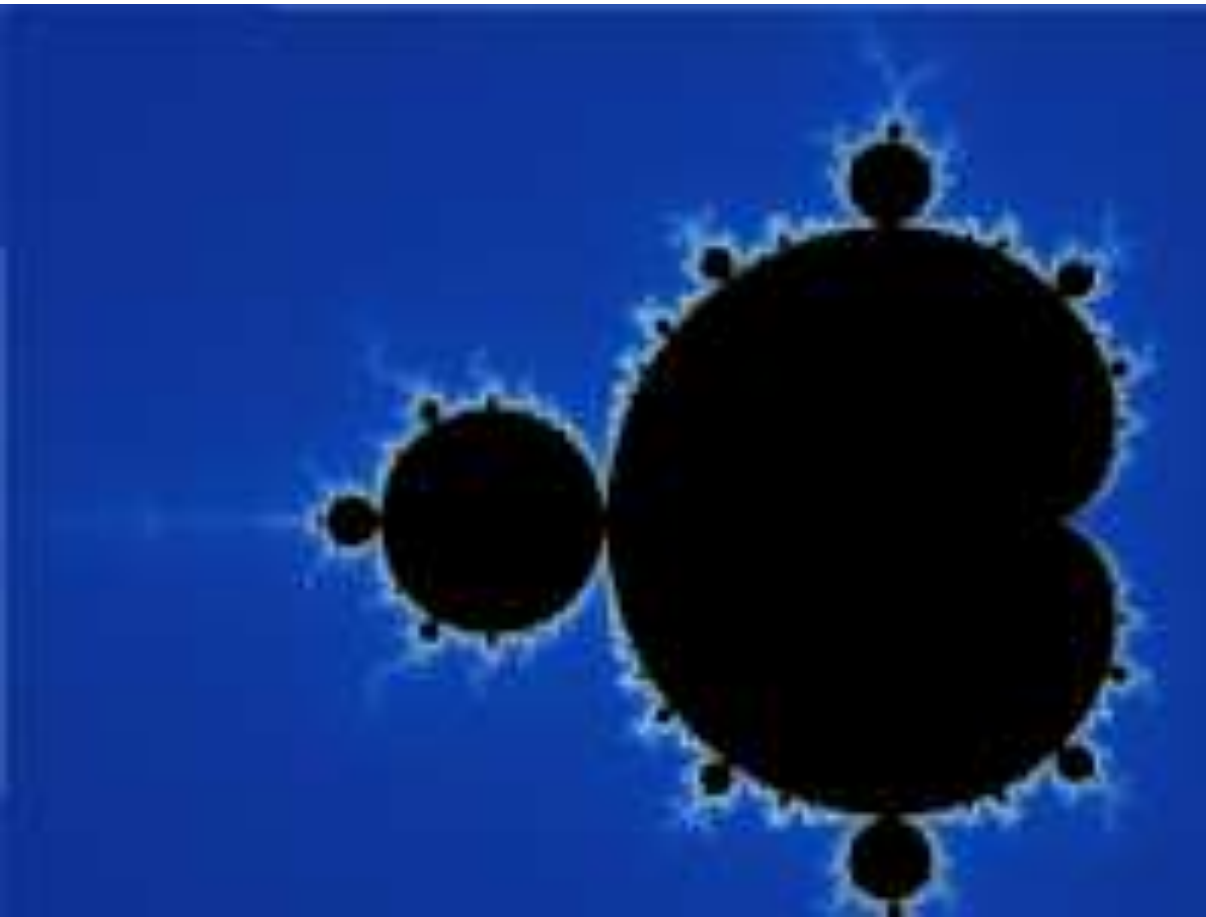
T

A

L

S

Fractals παντού ...

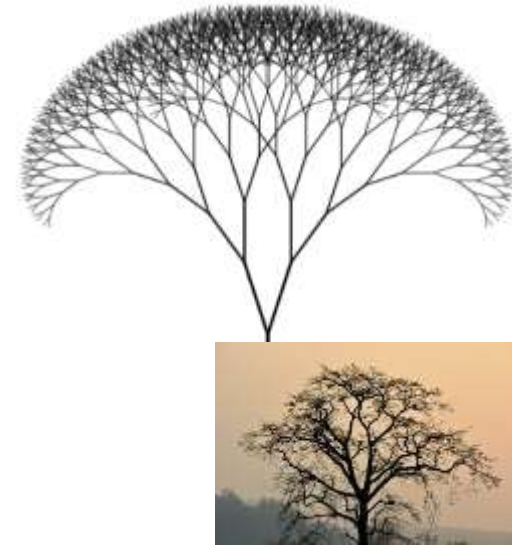
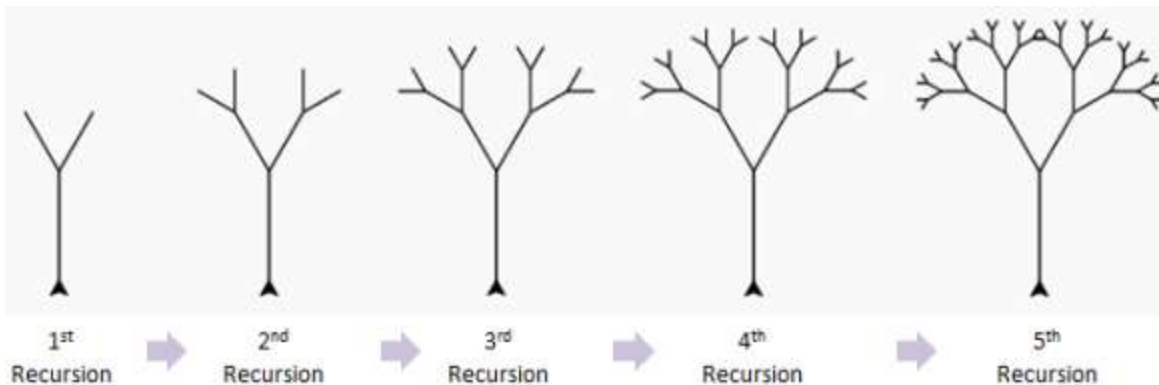


Μιχαήλ Ξένος
Αναπλ. Καθηγητής,
Τμήμα Μαθηματικών

Λέσχη των
Μαθηματικών,
"Μεθόδιος
Ανθρακίτης"

Τι σημαίνει **fractal** ?

- **Fractal** = μορφοκλασματικό σύνολο
- **Ορισμός**: τα σύνολα που εμφανίζουν αυτό-ομοιότητα υπό αλλαγή κλίμακας.



- Ο όρος προτάθηκε από τον **Μπενουά Μάντελμπροτ** (*Benoît Mandelbrot*) το 1975 και προέρχεται από τη λατινική λέξη **fractus**, που σημαίνει "σπασμένος", "κατακερματισμένος".

Μπενουά Μάντελμπροτ (*Benoît Mandelbrot*)

Γαλλο-αμερικανός μαθηματικός γεννημένος στην Πολωνία

Εργάστηκε σε ευρύ φάσμα πεδίων των μαθηματικών, ανάμεσα στα οποία συναντούμε τα **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά**

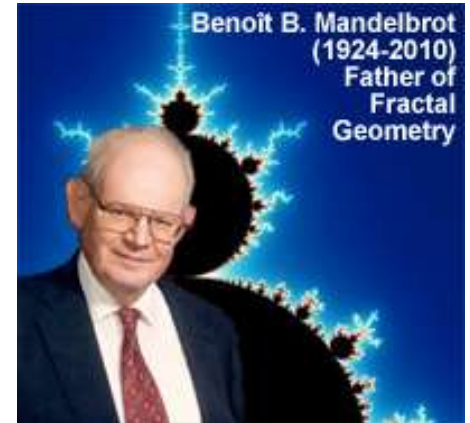
Θεωρείται «πατέρας» της μορφοκλασματικής γεωμετρίας

Λόγω της πρόσβασης του σε υπολογιστές της **IBM**, ήταν από τους πρώτους που χρησιμοποίησαν γραφικά υπολογιστών για να δημιουργήσει γεωμετρικά αντικείμενα μορφοκλασματικής μορφής. Το 1979 ανακάλυψε το λεγόμενο «**Σύνολο του Μάντελμπροτ**»

Έδειξε πώς η πολυπλοκότητα μπορεί να δημιουργηθεί από **απλούς κανόνες**

Είπε ότι τα πράγματα που συνήθως θεωρούνται ότι είναι "**χαοτικά**", όπως τα σύννεφα ή οι ακτές, στην πραγματικότητα έχουν «βαθμούς τάξης»

Προς το τέλος της καριέρας του, έφτασε στην υψηλότερη ακαδημαϊκή βαθμίδα του **Πανεπιστημίου του Γέιλ** (Sterling Professor of Mathematical Sciences)



$$z_{t+1} = z_t^2 + c, \quad c : \text{σταθ.}, \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$



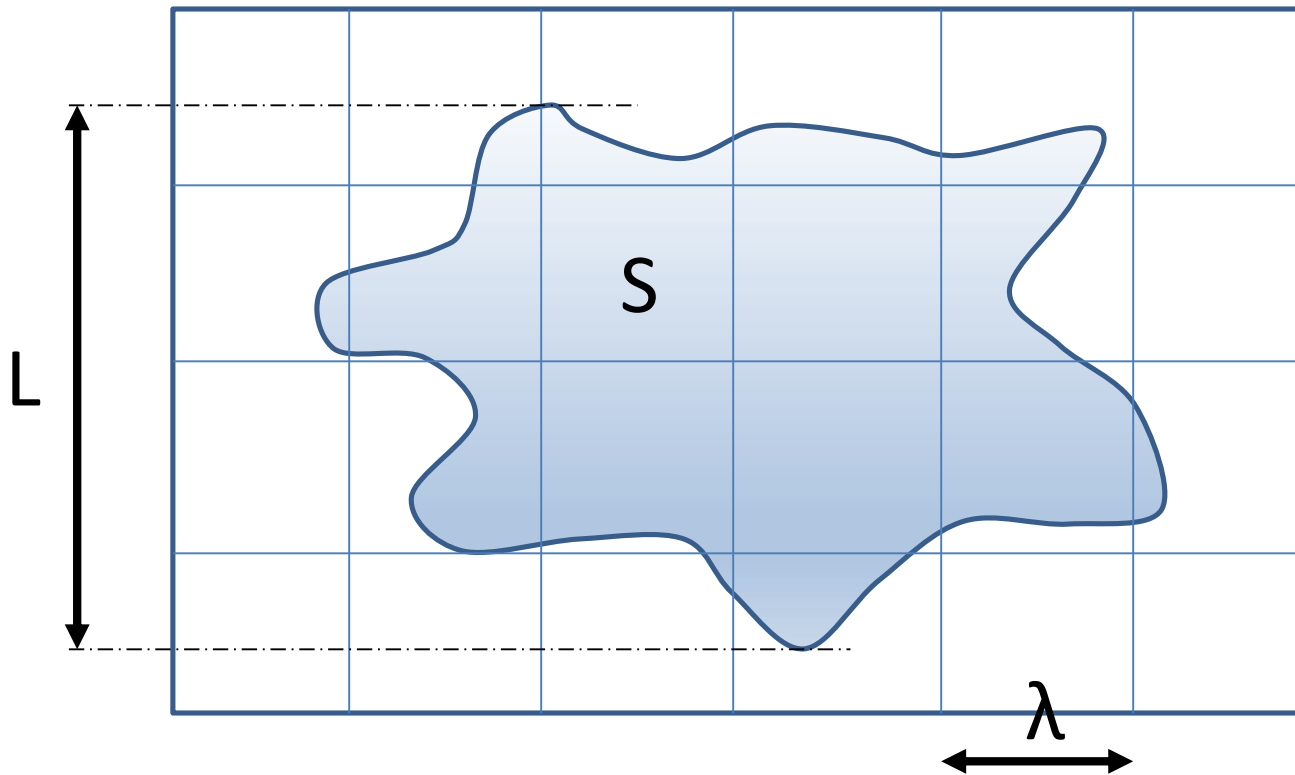
Το σύνολο του Cantor

- Ο Γκέοργκ Κάντορ (Georg Cantor) ήταν Ρώσος μαθηματικός, γνωστός για τη **Θεωρία συνόλων**.



- ο Cantor με το σύνολό του έδωσε απάντηση στο ερώτημα: «Εάν ένα σύνολο έχει μέτρο μηδέν, είναι αριθμήσιμο;»

Φράκταλ διάσταση

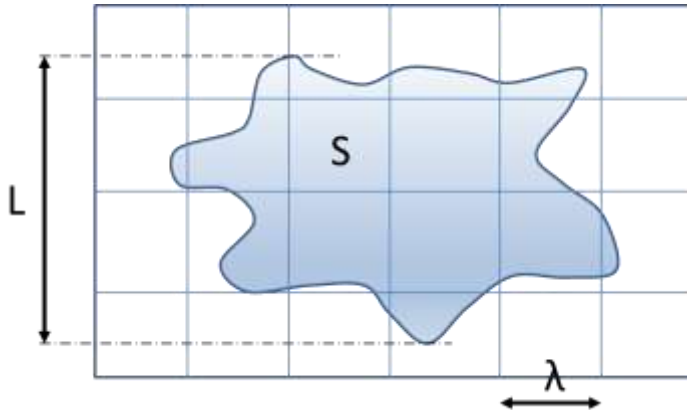


Εμβύθιση
πολύπλοκου σχήματος
σε 2 διαστάσεις και
«κάλυψη» αυτού από
τετράγωνα
πλευράς λ .

$N(L, \lambda)$ = ο ελάχιστος αριθμός τετραγώνων πλευράς λ που καλύπτουν πλήρως το S .
Η ελάχιστη διάσταση εμβύθισης εδώ είναι, $d = 2$.

Θέλουμε, $\lambda \rightarrow 0$, $N(L, \lambda) \rightarrow \infty$, καλούμε «δ-μέτρο» το $M_\delta = N(L, \lambda) \lambda^\delta$, $\delta > 0$ να είναι πεπερασμένο. Αν το S είναι συμπαγές τότε $\delta = d = 2$, σε αυτό το σχήμα.

Φράκταλ διάσταση



Εμβύθιση πολύπλοκου σχήματος σε 2 διαστάσεις και «κάλυψη» αυτού από τετράγωνα πλευράς λ .

$N(L, \lambda)$ = ο ελάχιστος αριθμός τετραγώνων πλευράς λ που καλύπτουν πλήρως το S .
Η διάσταση εμβύθισης εδώ είναι, $d = 2$.

$N(L, \lambda) \leq (L/\lambda)^d$ και $N(L, \lambda) = c \lambda^{-D}$, $\lambda > 0$, όπου D : η μορφοκλασματική διάσταση,

Αδιαστατοποιώντας με $\varepsilon = \lambda/L$, έχουμε ότι:

$$N(L, \lambda) = N(\varepsilon) = c \varepsilon^{-D}, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Έτσι ορίζουμε την φράκταλ (μορφοκλασματική) διάσταση, D , του σώματος S .

Το σύνολο του Cantor και η φράκταλ διάσταση



Τριαδικό σύνολο του Cantor

Αριθμός «τετραγώνων» ή «κουτιών» $N_n = 2^n$, με μήκος $\varepsilon_n = 1/3^n$

Δηλαδή, $2^n = c3^{nD}$, $n \rightarrow \infty$,

Παίρνουμε τον λογάριθμο των δύο πλευρών, $D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.630929 \dots$

Το σύνολο του Cantor είναι εμβυθισμένο σε χώρο διάστασης $d = 1$ και δεν αποτελείται από μεμονωμένα σημεία.

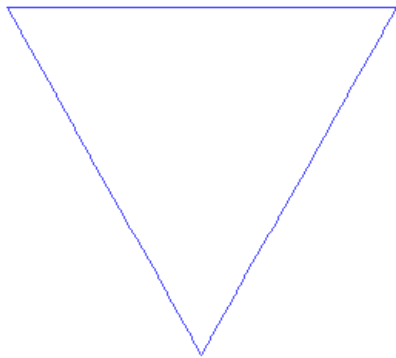
Παρά το γεγονός ότι το «μήκος» του είναι μηδέν, $l = \lim_{n \rightarrow \infty} N_n L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Η ακτή της Νορβηγίας και η γραμμή του Koch



Το 1904 στην εργασία του “On a Continuous Curve Without Tangents, Constructible from Elementary Geometry”

ο Σουηδός μαθηματικός **Helge von Koch** δίνει ένα μαθηματικό τρόπο για την περιγραφή των «φιόρδ» της Νορβηγικής ακτής.



Iteration 1



Iteration 2

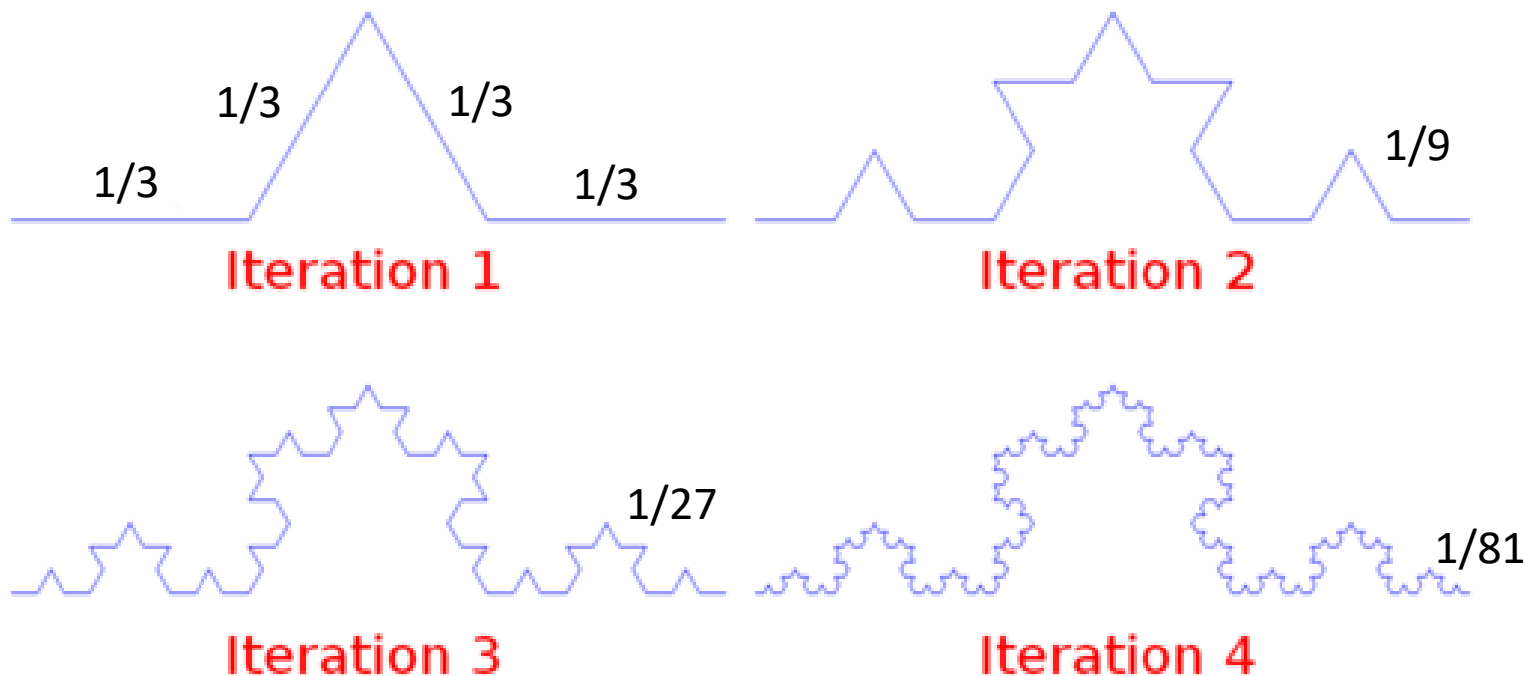


Iteration 3



Iteration 4

Η ακτή της Νορβηγίας και η γραμμή του Koch



Αριθμός «κουτιών» $N_n = 4^n$, με μήκος $\varepsilon_n = 1/3^n$. Δηλαδή, $4^n = c3^{nD}$, $n \rightarrow \infty$

Παίρνουμε τον λογάριθμο των δύο πλευρών, $D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2618595 \dots$, στο όριο $n \rightarrow \infty$

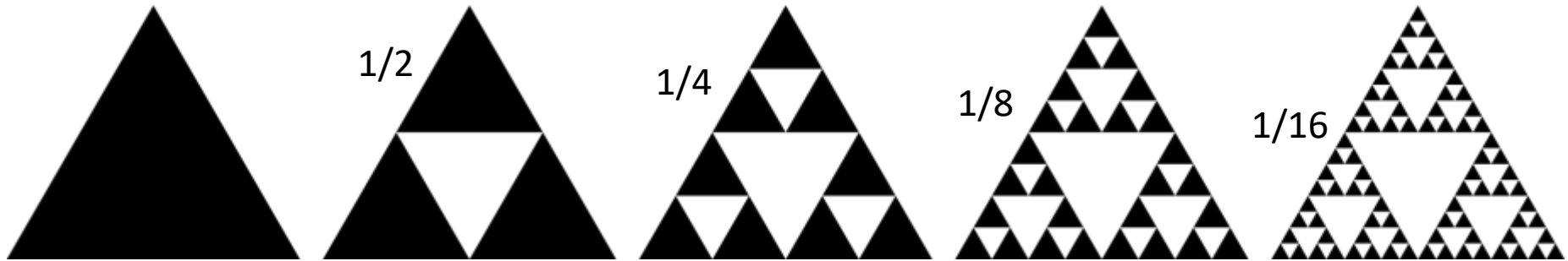
Αφού $1 < D < 2$, η γραμμή του Koch είναι κάτι περισσότερο από μονοδιάστατη καμπύλη και καταλαμβάνει κάτι λιγότερο από τμήμα του δισδιάστατου επιπέδου.

Το «μήκος» της είναι, $l = \lim_{n \rightarrow \infty} N_n L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$

Το τρίγωνο του Sierpinski

Βάτσλαφ Σιερπίνσκι, Πολωνός Μαθηματικός

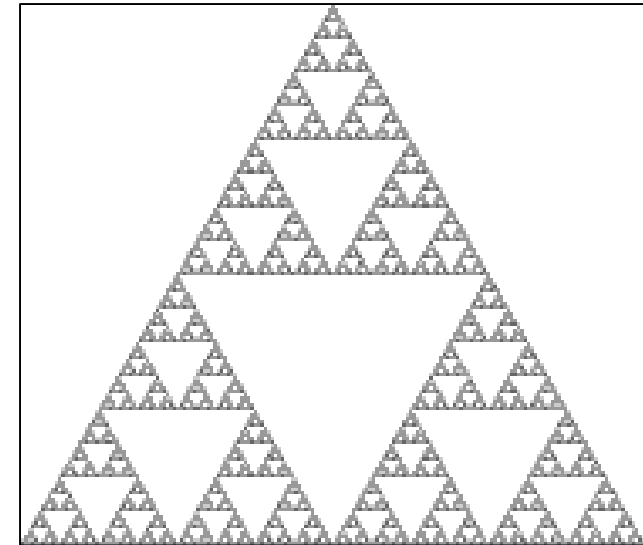
Παρόμοια κατασκευή κατά το παρελθόν αποτελεί
η τετρακτύς των Πυθαγορείων (6ος αιώνας π.Χ.)



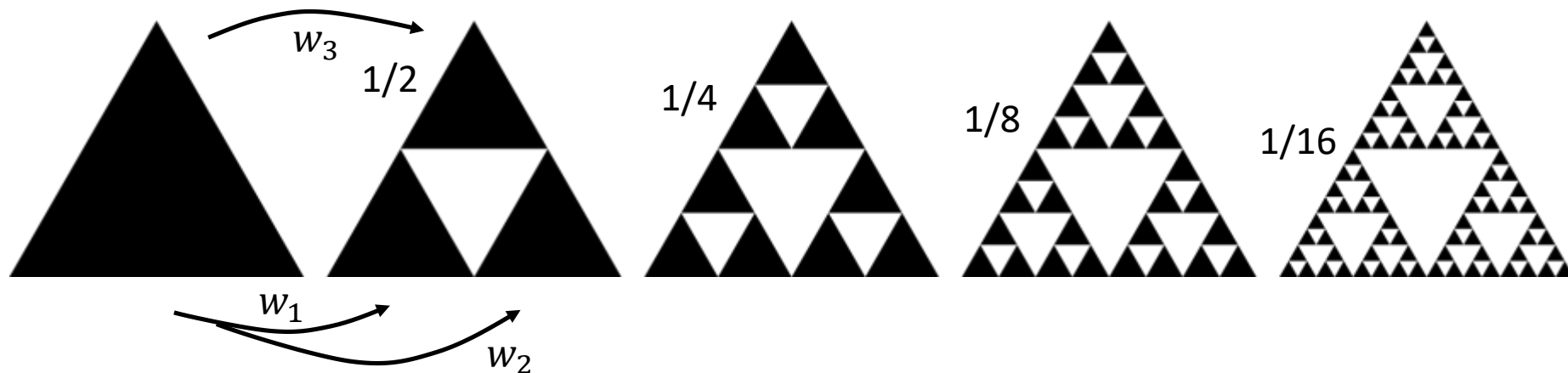
Αριθμός «κουτιών» $N_n = 3^n$, με μήκος $\varepsilon_n = 1/2^n$.
Δηλαδή, $3^n = c2^{nD}$, $n \rightarrow \infty$

Παίρνουμε τον λογάριθμο των δύο πλευρών,

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,585 \dots, \text{ στο όριο } n \rightarrow \infty$$



Το τρίγωνο του Sierpinski



Για να κατασκευάσουμε το σύνολο του Sierpinski:

Επιλέγουμε ένα συμπαγές αρχικό σύνολο, $A_0 \subset \mathbb{R}^2$ και κατασκευάζουμε μια ακολουθία $A_n, n = 1, 2, 3, \dots$ συνόλων, μέσω ενός γραμμικού μετασχηματισμού συστολής (affine mapping).

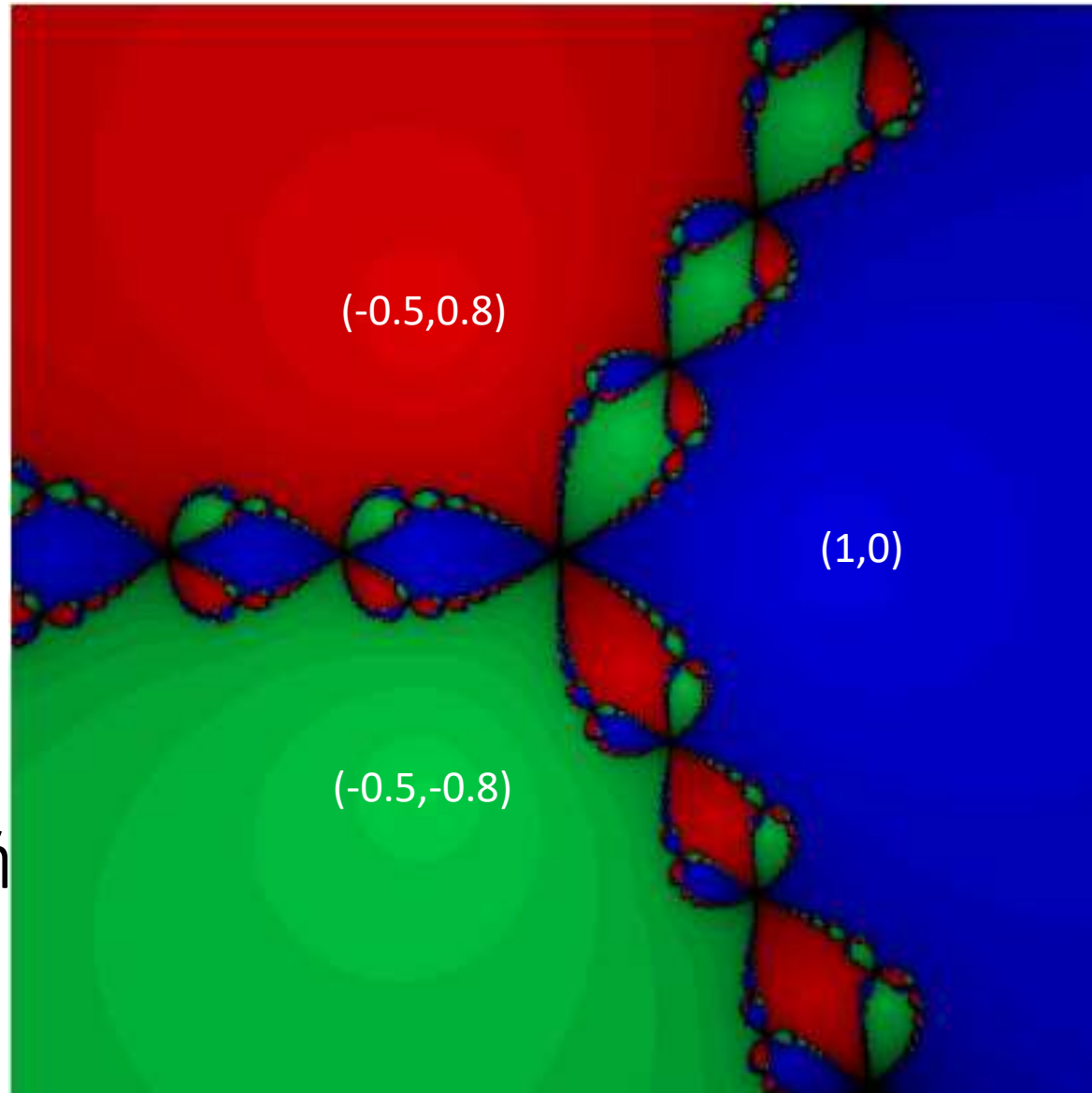
$$\begin{aligned} w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Οι τρίτες ρίζες της μονάδας ...

Αριθμητική επίλυση της
εξίσωσης,

$$z^3 - 1 = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

Μεταξύ των ριζών
εμφανίζονται
παράξενα σχήματα,
«δάκρυα», που
εμφανίζουν αυτό-
ομοιότητα υπό αλλαγή
κλίμακας (fractal)



Χάουσντορφ διάσταση (Hausdorff dimension)

Felix Hausdorff, (1868 – 1942) Γερμανός μαθηματικός, ασχολήθηκε με την Τοπολογία, Θεωρία Συνόλων, Θεωρία Μέτρου, Συναρτησιακή Ανάλ.



Έστω $S \subset \mathbb{R}^d$, «κάλυψη» $K(\varepsilon)$, του συνόλου S από N d -διάστατα «κουτιά». Ορίζουμε το ε -μέτρο του S ως,

$$V(S, \varepsilon) = \inf_{K(\varepsilon)} \left\{ \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^x \right\}$$

Ορισμός: Ορίζουμε το x -διάστατο μέτρο Hausdorff του S ,

$$V(S, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V(S, \varepsilon)$$

Το $V(S, x)$ μπορεί να πάρει το πολύ 3 τιμές αφού αποδεικνύεται ότι υπάρχει $D_H > 0$ τέτοιο ώστε,

$$V(S, x) = \begin{cases} \infty, & \alpha\nu \ 0 \leq x < D_H \\ 0, & \alpha\nu \ x > D_H \\ 0 \leq c < \infty, & \alpha\nu \ x = D_H \end{cases}$$

Ο αριθμός D_H καλείται διάσταση **Hausdorff** του S



Χάουσντορφ διάσταση (Hausdorff dimension)

Ορισμός: Ορίζουμε το x -διάστατο μέτρο Hausdorff του S ,

$$V(S, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V(S, x, \varepsilon)$$

Το $V(S, x)$ μπορεί να πάρει το πολύ 3 τιμές αφού αποδεικνύεται ότι υπάρχει

$D_H > 0$ τέτοιο ώστε,

$$V(S, x) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } 0 \leq x < D_H \\ 0, & \text{αν } x > D_H \\ 0 \leq c < \infty, & \text{αν } x = D_H \end{cases}$$

Ο αριθμός D_H καλείται διάσταση **Hausdorff** του S ,

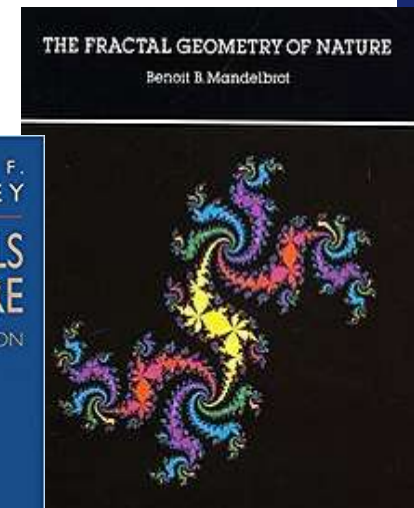
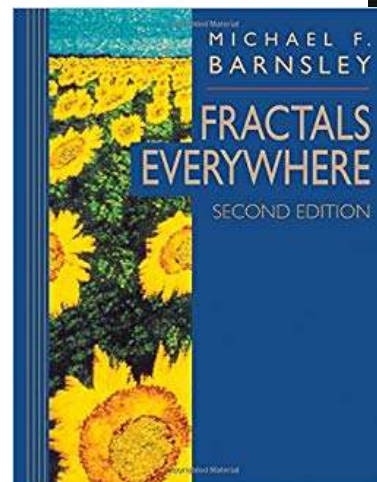
$$D_H = \inf_x \{x/V(S, x)\} = \sup_x \{x/V(S, x)\}$$

Παρατήρηση: Ο παραπάνω ορισμός είναι παρόμοιος με αυτόν της φράκταλ διάστασης, D , με μια σημαντική διαφορά. Το D_H προσδιορίζεται από κάλυψη «κουτιών» μεταβλητού μήκους πλευράς ε_i . Ενώ για το D , όλα τα «κουτιά» έχουν το ίδιο μήκος πλευράς, ε .

Θεώρημα: Αποδεικνύεται ότι $D_H \leq D \leq d$ για το S

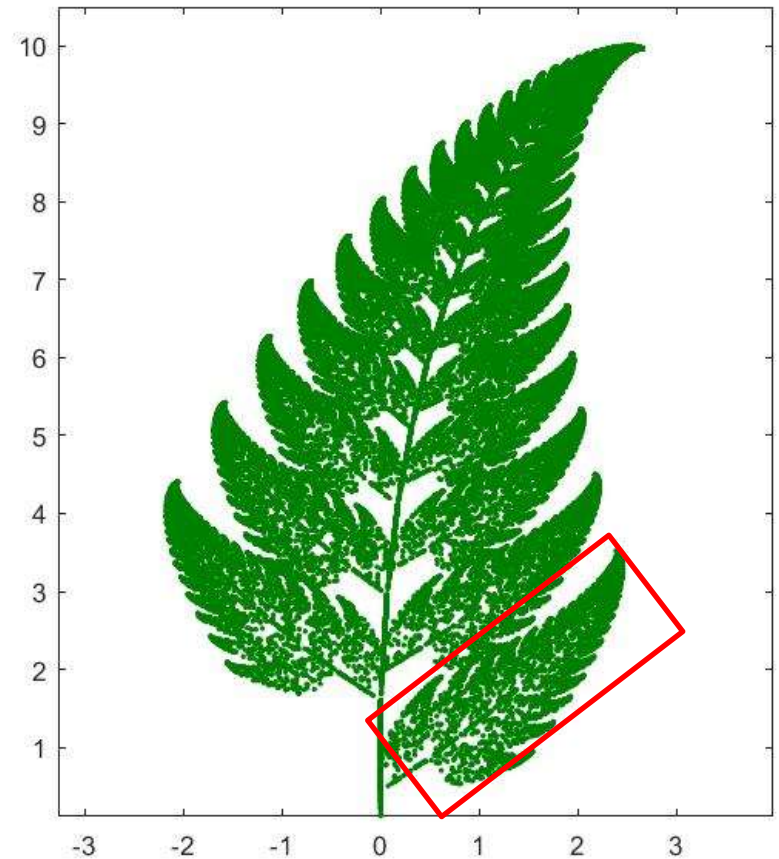
Κάποια βιβλία ...

- **M. Barnsley**, *Fractals Everywhere*, 2nd Edition, Morgan Kaufmann Pub, 1993.
- **Benoît Mandelbrot**, *The Fractal Geometry of Nature*, 2nd Edition, Times Books, 1982.
- **Α. Μπούντης**, *Δυναμικά Συστήματα και Χάος*, Εκδότης Παπασωτηρίου, 1995.



Fractals στην φύση ...

Η φτέρη και η μορφοκλασματική της αναπαράσταση



Fractals στην φύση ...

Η φτέρη και η μορφοκλασματική της αναπαράσταση

Για να κατασκευάσουμε την φράκταλ φτέρη
χρειαζόμαστε τέσσερις γραμμικούς μετασχηματισμούς
της μορφής

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

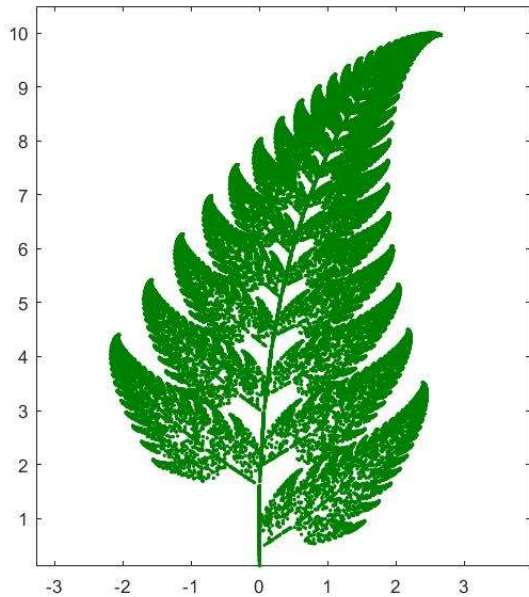
Πιο συγκεκριμένα,

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix},$$

$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix},$$

$$w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix}$$



Fractals στην φύση ...

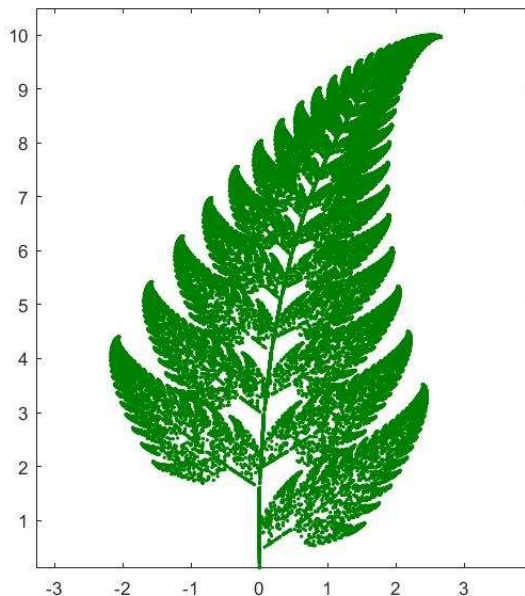
Η φτέρη και η μορφοκλασματική της αναπαράσταση

Κώδικας σε MatLab

<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/4372-fractal-fern>

Σε άλλες γλώσσες
προγραμματισμού

https://en.wikipedia.org/wiki/Barnsley_fern



```
NumOfPts = 10000; iterations = 50;
pts = zeros(NumOfPts,2);
for j = 1:NumOfPts
    x = rand(1); y = rand(1);

    for i = 1 : iterations
        p = rand(1);
        if p < .01
            xn = 0;
            yn = .16*y;
            x = xn;
            y = yn;
        elseif p < .08
            xn = .2*x-.26*y;
            yn = .23*x+.22*y+1.6;
            x = xn;
            y = yn;
        elseif p < .15
            xn = -.15*x+.28*y;
            yn = .26*x+.24*y+.44;
            x = xn;
            y = yn;
        else
            xn = .85*x+.04*y;
            yn = -.04*x+.85*y+1.6;
            x = xn;
            y = yn;
        end
        end % i
        pts(j,1) = x;
        pts(j,2) = y;
    end%j
    xs = pts(:,1);
    ys = pts(:,2);
    plot(xs,ys,'.','Color','g')
    axis([min(xs)*1.5,max(xs)*1.5,min(ys)*1.05,max(ys)*1.05]);
```

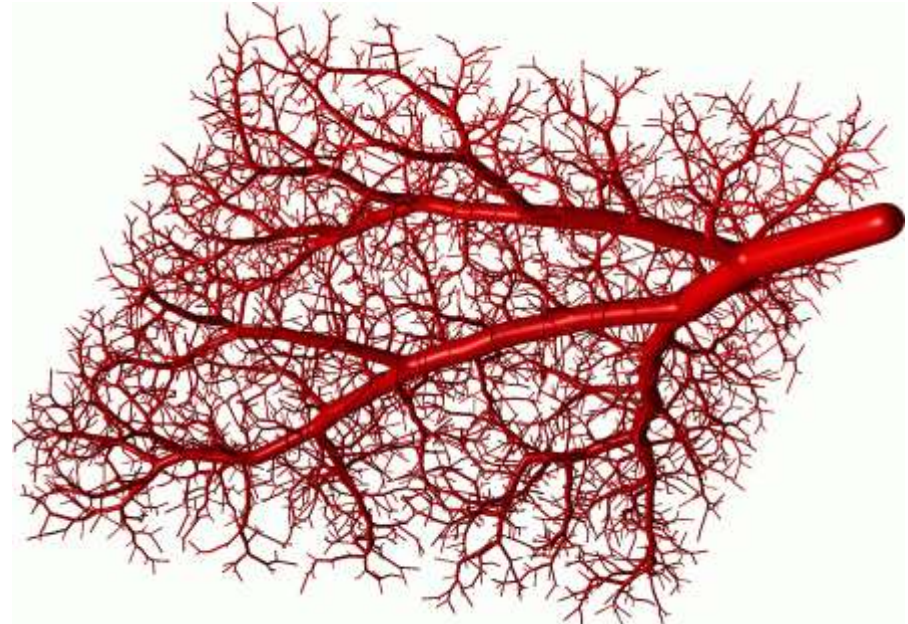
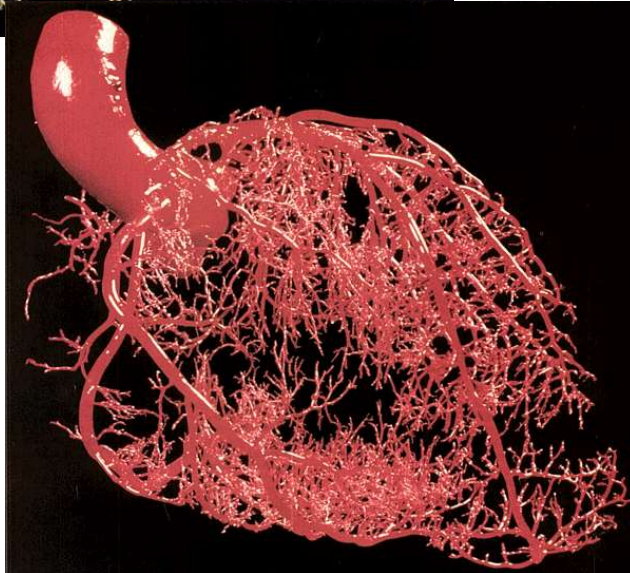
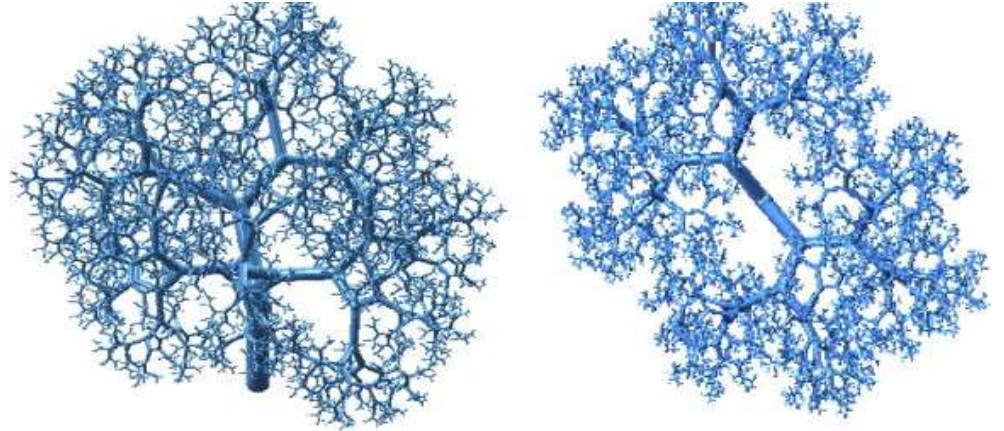
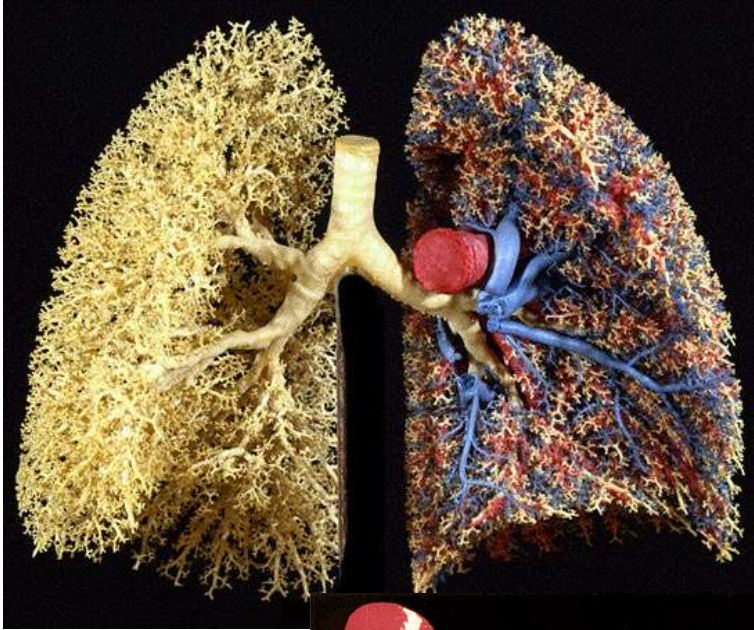
Fractals στην φύση ...



Google earth:
<http://paulbourke.net/fractals/googleearth/>

Fractals στην φύση ...

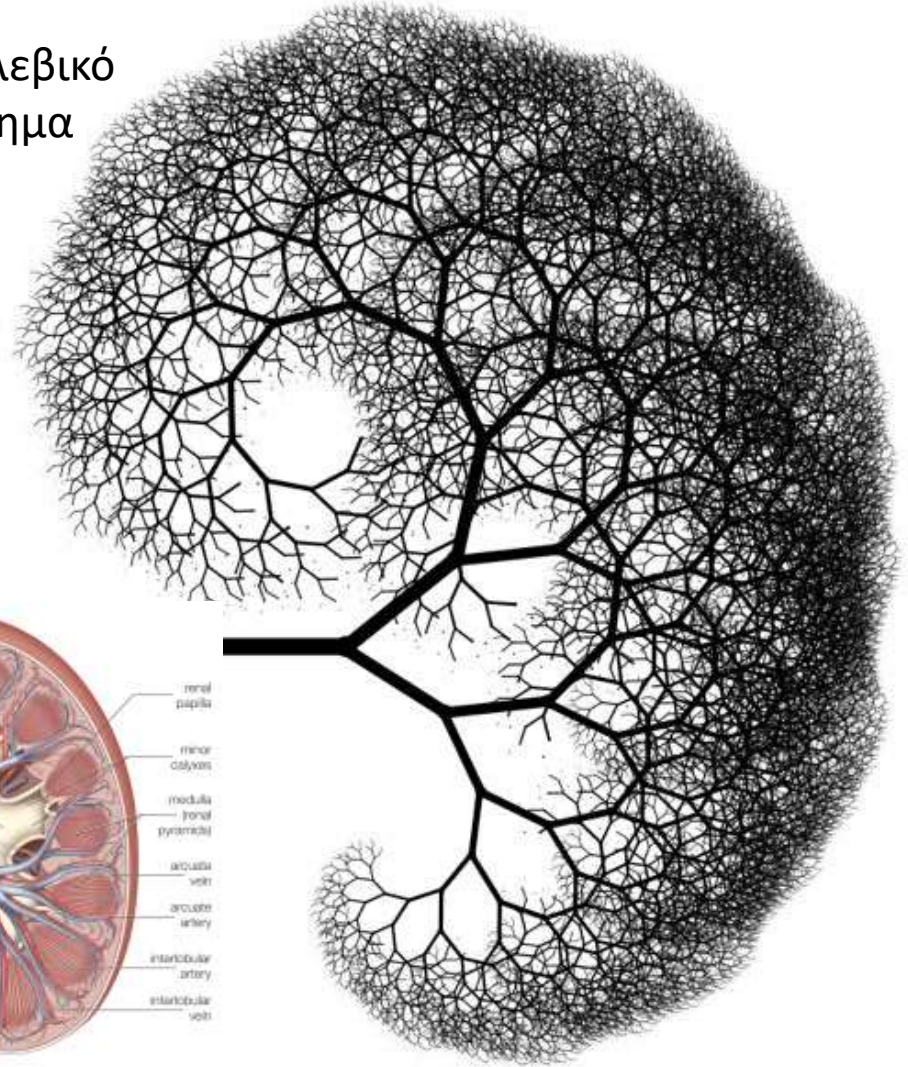
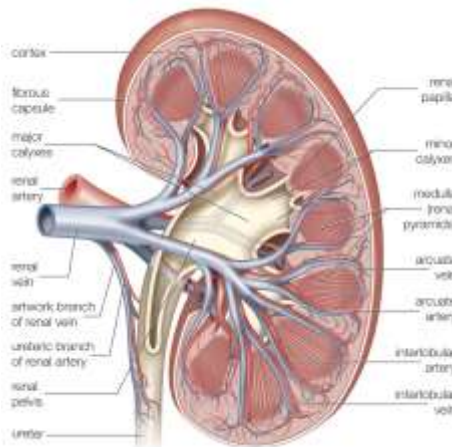
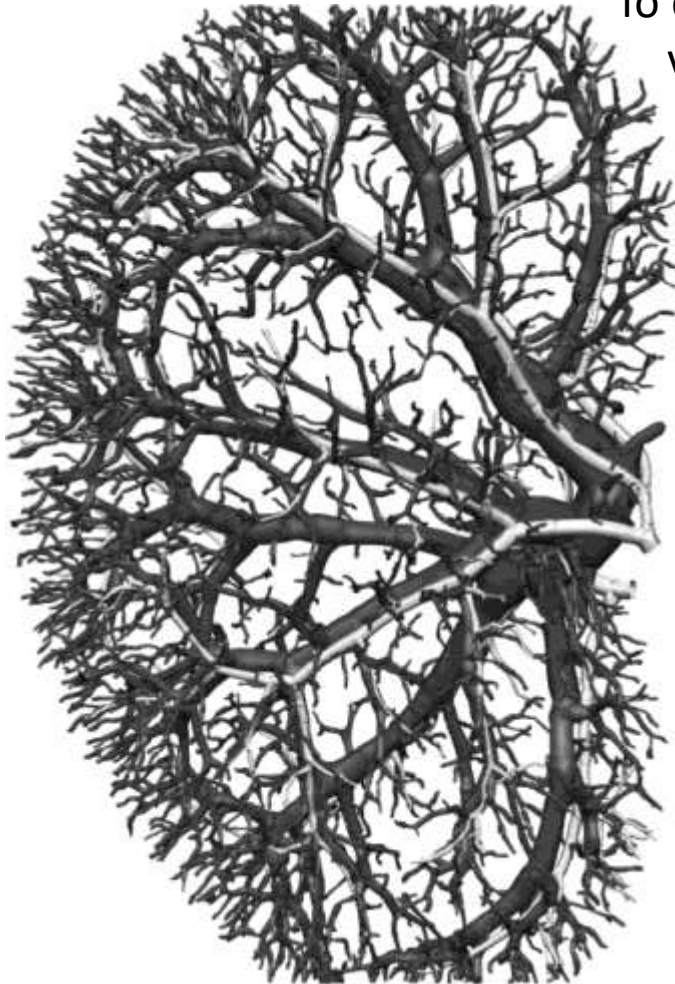
Το ανθρώπινο σώμα και φράκταλ αναπαραστάσεις του



Fractals στην φύση ...

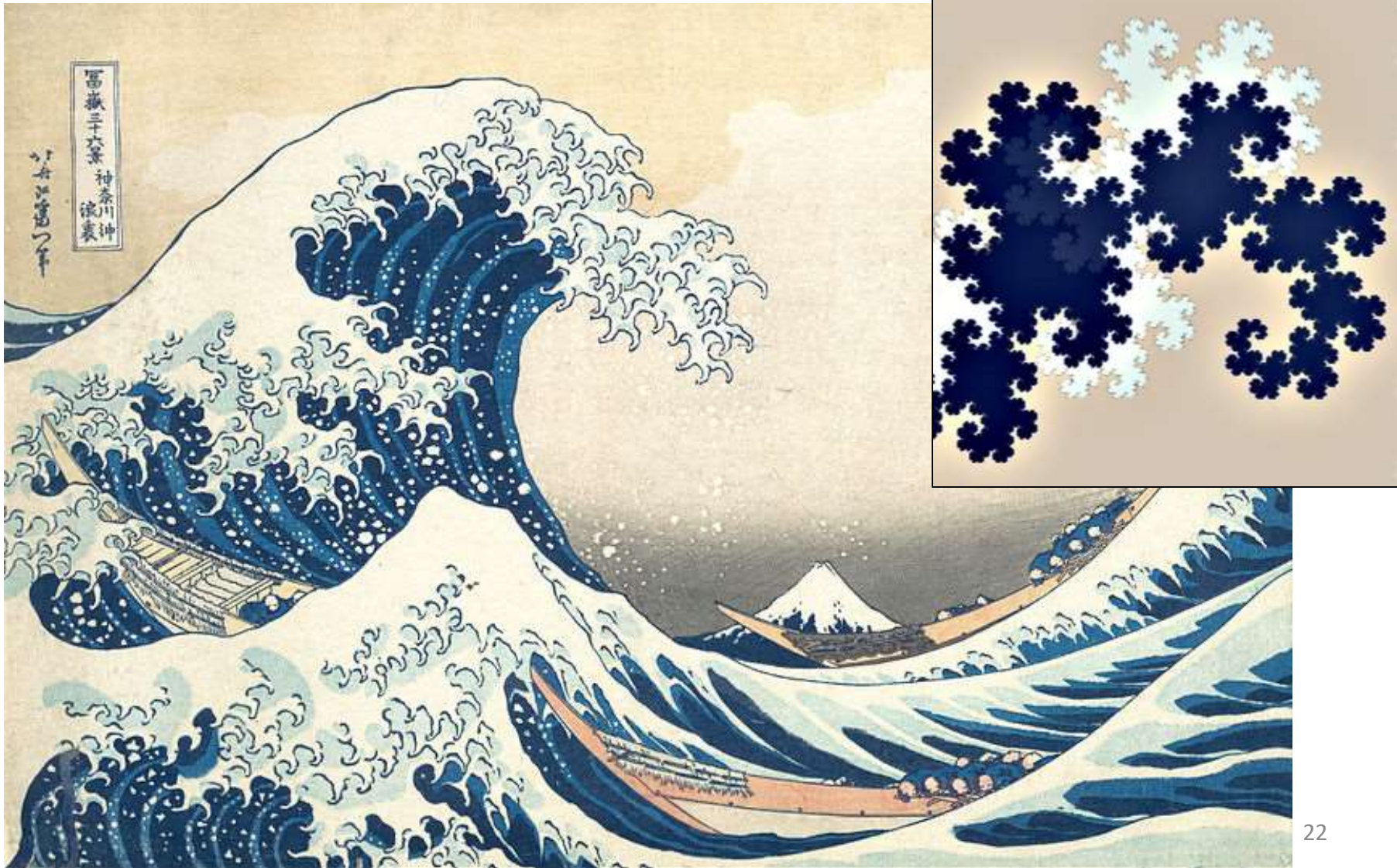
Το ανθρώπινο σώμα και φράκταλ αναπαραστάσεις του

Το αρτηριακό-φλεβικό
νεφρικό σύστημα



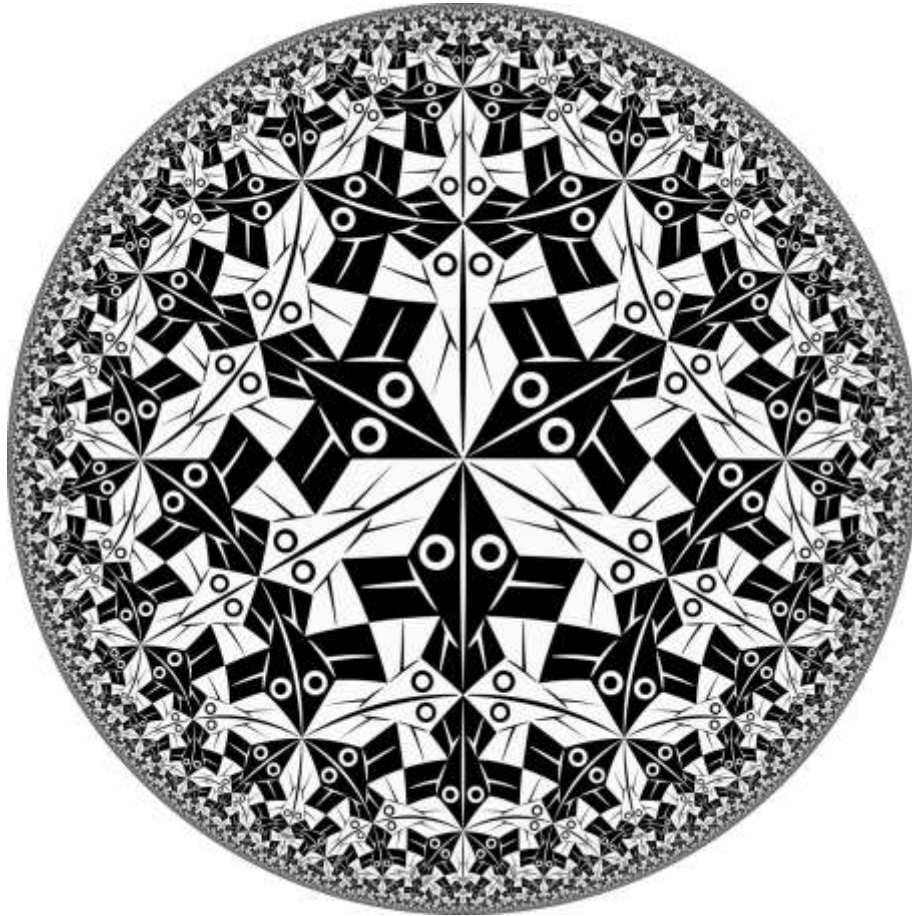
Fractals στην τέχνη ...

- **The Great Wave off Kanagawa** (1760 – 1849) Κατσουσάικα Χοκουσάι Ιάπωνας καλλιτέχνης, χαράκτης και σκιτσογράφος.

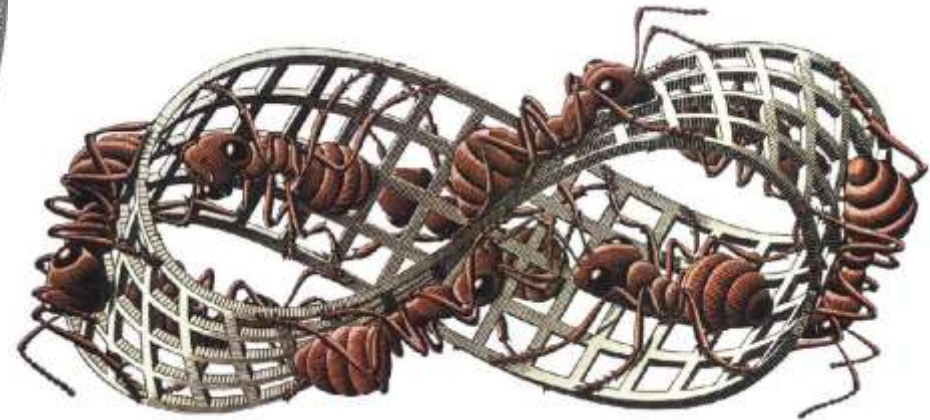


Fractals στην τέχνη ...

- Maurits Cornelis Escher (1898 – 1972) Ολλανδός καλλιτέχνης που επηρεάστηκε και εμπνεύστηκε από τα μαθηματικά



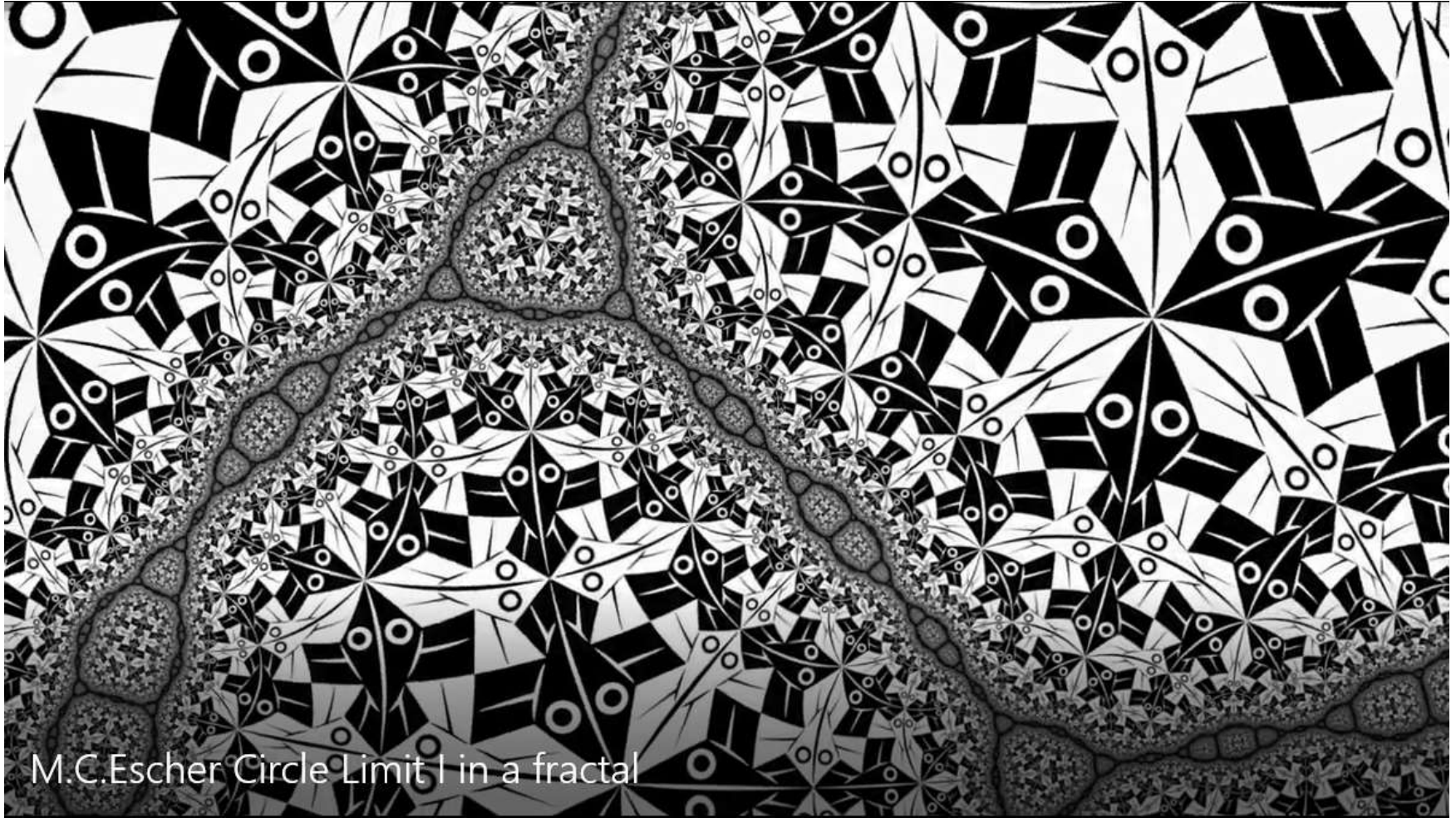
Circle Limit I



Möbius strip

Fractals στην τέχνη ...

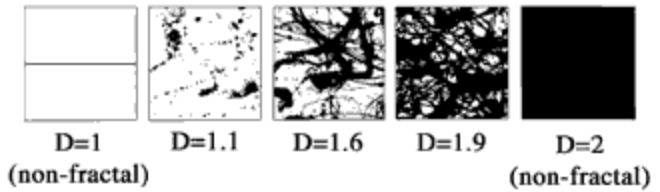
- M.C. Escher "Circle Limit I" in a fractal



M.C. Escher Circle Limit I in a fractal

Fractals στην τέχνη ...

- Jackson Pollock



Βασική βιβλιογραφία

- M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, 2nd Edition, Morgan Kaufmann Pub, 1993.
- B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, 2nd Edition, Times Books, 1982.
- Α. Μπούντης, Δυναμικά Συστήματα και Χάος, Εκδότης Παπασωτηρίου, 1995.
- R. P. Taylor, Order in Pollock's Chaos, Scientific American, Inc., 2002.
- Google earth: <http://paulbourke.net/fractals/googleearth/>
- Wikipedia in fractals: <https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal>

Ευχαριστώ !